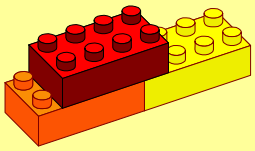
ΗΥ-280

«ΘΕΩΡΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ»

θεμελιακές έννοιες της επιστήμης του υπολογισμού



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Γεώργιος Φρ. Γεωργακόπουλος

Μέρος Α′

Εισαγωγή,
και η βασική θεωρία των πεπερασμένων αυτομάτων.

1ο Γενική εισαγωγή και λίγα ιστορικά πρόσωπα.

Η μελέτη μιας επιστημονικής/μαθηματικής (και όχι μόνον) περιοχής, βοηθά στην κατανόηση της ιστορίας της, ισχύει όμως και το αντίστροφο: η ιστορία μιας περιοχής φωτίζει και την ίδια. Η ιστορία της θεωρίας του υπολογισμού όμως δεν έχει γραφεί ακόμα. Η σχετική διεθνής βιβλιογραφία σε αυτό το θέμα είναι ακόμα αποσπασματική, ίσως ακόμα και ρηχή. Δεν έχουμε λοιπόν να προσφέρουμε μια καλή σύνοψη του τί συνέβη και φτάσαμε να έχουμε μια θεωρία (και μια τεχνολογία, πια) του υπολογισμού. Αντ' αυτού θα απαριθμήσουμε μια σειρά επεισοδίων σχετικά με αυτή την εξέλιξη, μέσω μιας σειράς από εξέχουσες προσωπικότητες. Ο αναγνώστης έχει, πια, την δυνατότητα να τις αναζητήσει στο διαδίκτυο (βλ. wikipedia.org), και να βρεί πλήθος από πληροφορίες, σχετικά με την ιστορική περιπέτεια του «υπολογισμού».

Αριστοτέλης, ο Σταγειρίτης	**384-332** π.Χ., Έλληνας, Αρχαία Μακεδονία και Αθήνα. Μεταξύ αναρίθμητων συνεισφορών του, ο Αριστοτέλης έγραψε και ένα εγχειρίδιο για την λογική. Εκινείτο στο επίπεδο του «προτασιακού λογισμού», και όπως ο ίδιος έλεγε «*περί της συμπερασματικής λογικής δεν εγνώριζε καμμία προηγούμενη πηγή*» (αν και κάποιοι είχαν, προηγουμένως, ασχολήθεί με τους κανόνες όχι της σκέψης αλλά της γλώσσας, και είχαν μιλήσει για το «συντακτικό» της). Η «Αριστοτελική Λογική» έμελε να παραμείνει σε εκείνο το αρχικό επίπεδο για πάνω από 2000 χρόνια.
Στωικοί	circa **300** π.Χ. - **200** μ.Χ., Έλληνες (και όχι μόνο). Η σχολή των Στωικών είχε την δική της εκδοχή για την «λογική», η οποία έδινε θεμελιώδη έμφαση στη σχέση «συνεπάγεται» ('p → q' αν και τότε δεν χρησιμοποιούσαν αυτόν τον συμβολισμό). Η εκδοχή τους νόμιζαν ότι διέφερε από εκείνη του Αριστοτέλη, αυτό όμως συνέβαινε μόνον επιφανειακά.
Ευκλείδης, ο Αλεξανδρινός	Εποχή Πτολεμαίου (**323-283** π.Χ), Έλληνας, Αλεξάνδρεια Αιγύπτου. Έφορος της βιβλιοθήκης της Αλεξανδρείας, και κατά γενική ομολογία ο κρισιμότερος μαθηματικός όλων των εποχών. Με τα «Στοιχεία» του (circa **300** π.Χ.), όχι μόνο θεμελίωσε την γεωμετρία, αλλά και την ίδια την μαθηματική μέθοδο: σαφείς ***ορισμοί*** και ακριβείς ***αποδείξεις***. Τα «Στοιχεία» [1] περιλαμβάνουν και τον περίφημο «αλγόριθμο του Ευκλείδη» (για την εύρεση του μέγιστου κοινού διαιρέτη), έναν από τους πρώτους ρητά διατυπωμένους αλγορίθμους (*μαζί με την απόδειξη ότι είναι σωστός*!) – αν και ούτε εκείνη την εποχή τον έβλεπαν ως αλγόριθμο, ούτε και ποτέ (προ 20ου αιώνα) τον ονόμαζαν έτσι...
Μεσαιωνική φιλοσοφία	Αν και επί σειρά αιώνων (sic) οι φιλόσοφοι και οι μαθηματικοί διαπίστωναν προβλήματα και ελλείψεις στα διαθέσιμα «εργαλεία» της λογικής, δεν επέτυχαν καμμία ουσιώδη συνεισφορά.
George Boole	1815 -1864, Βρεττανός. Το **1847** με το βιβλίο του *The laws of thought* επανέφερε το θέμα της λογικής, ακριβέστερα του προτασιακού λογισμού, έδειξε την ενότητα των απόψεων του Αριστοτέλη και των Στωικών, και έδειξε τις δυνατότητες αλγεβρικού χειρισμού της λογικής. Η λογική δεν ήταν πια μόνον *όργανο* των μαθηματικών, αλλά και *αντικείμενο* των μαθηματικών.
Gottlob Frege	1848-1925, Γερμανός. Φυσιογνωμία-κλειδί. Το **1879** με το βιβλίο του «Εννοιογραφία» (!) επεξέτεινε ρητά και συνειδητά – επί τέλους – την προτασιακή λογική, περιγράφοντας τον *κατηγορηματικό λογισμό*, εισάγοντας τους λογικούς ποσοδείκτες (∀ και ∃), και δείχνοντας το πώς οι αποδείξεις μπορούν να γίνουν μέσω συμβολικών κατ' ουσίαν χειρισμών. Ο κατηγορηματικός λογισμός είναι σχεδόν αποκλειστικά το

[1] Εκτιμάται ότι από όλα τα βιβλία της ιστορίας, μόνον η Βίβλος έχει γνωρίσει περισσότερες εκδόσεις από ότι τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη!

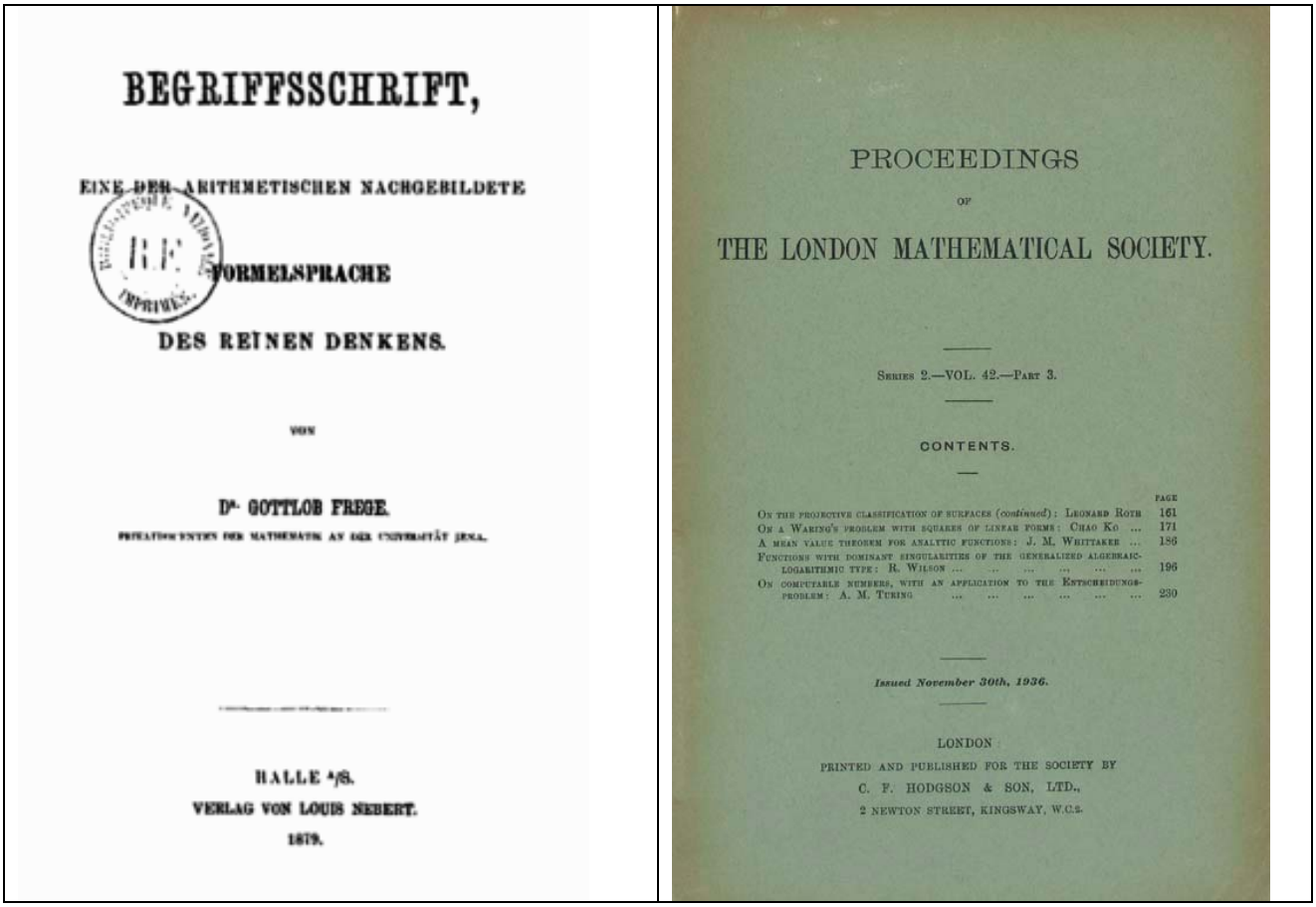
	σύστημα λογικής που χρησιμοποιούμε τώρα στα μαθηματικά. Το **1893** (Ι τόμος) και **1903** (ΙΙ τόμος) με το βιβλίο του *Βασικοί νόμοι της αριθμητικής* προσπάθησε να θεμελιώσει τους φυσικούς αριθμούς επί της λογικής. Μια κρίσιμη λογική αδυναμία στον ΙΙ τόμο, άναψε την φωτιά της αναζήτησης επαρκώς ευσταθών θεμελίων για τα μαθηματικά, και οδήγησε στην συστηματική ανάλυση της μεθόδου των «αποδείξεων» και στη συνέχεια των «υπολογισμών».
Giuseppe Peano	1858-1932, Ιταλία. Το **1889** δημοσίευσε ένα συλλεκτικό έργο (με εργασίες από το 1860) επί της «αξιωματικής θεμελίωσης» των φυσικών αριθμών, για να δείξει ότι λίγες αρχικές παραδοχές αρκούν για να εξαχθεί αποδεικτικά όλη η θεωρία των αριθμών. Τα σχετικά αξιώματα καλούνται ακόμα «αξιώματα του Peano».
Bertrand Russel	1872-1970, Βρεττανός. Το **1900** επεσήμανε το (περίφημο έκτοτε) «παράδοξο του Russel»[2], μια καίρια αντίφαση στο υπό δημοσίευση έργο του Frege (τί τύχη...). Ο ίδιος εργάστηκε επί μακρά σειρά ετών στην «αξιωματική θεμελίωση» των μαθηματικών, εμπεδώνοντας ότι ο λογισμός του Frege ήταν όντως, με σωστή χρήση, το κατάλληλο εργαλείο.
David Hilbert	1862-1943, Γερμανός. Εμβληματική φυσιογνωμία των μαθηματικών του 20ου αιώνα. Όχι μόνον έκανε πολλά και βαθειά μαθηματικά, αλλά *έκανε τα ίδια τα μαθηματικά του 20ου αιώνα*, προσδιορίζοντας τόσο τα μείζονα προβλήματά τους, αλλά και τις μεθόδους τους: ο Hilbert βάθυνε και στερέωσε την χρήση της ευκλείδιας αξιωματικής μεθόδου. Το σημείο κλειδί όσον αφορά στην ιστορία του υπολογισμού είναι ότι τις 10ετίες **1900-1920** υποστήριζε θερμά την «πεπερασμένη» (*finitary*) εκδοχή των μαθηματικών εργαλείων· ότι δηλαδή με πεπερασμένες και διακριτές λογικές μεθόδους μπορούμε και θα είμαστε σε θέση να κρίνουμε την αλήθεια ή το ψεύδος κάθε δυνατής μαθηματικής πρότασης. Ως προς αυτό, διαψεύστηκε από έναν μαθητή του, τον K. Gödel.
Kurt Gödel	1906-1978, Αυστριακός. Εργάστηκε στη λογική και έδωσε τα θεωρήματα της «πληρότητας» (του κατηγορηματικού λογισμού a-la Frege), και της «μη-πληρότητας» (της αριθμητικής, διδ. διατριβή, **1931**). Το 2ο θεωρείται το πιο «shocking» θεώρημα του 20ου αιώνα, αν όχι όλων των μαθηματικών μέχρι τώρα. (Εξ άλλου τα μαθηματικά του 20ου αιώνα είναι το 95% όλων των μαθηματικών μέχρι τώρα...). Το θεώρημα αυτό λέει ότι η αριθμοθεωρία περιέχει προτάσεις που *είναι μεν αληθινές, αλλά δεν μπορούμε να τις αποδείξουμε* (με κανένα «εύλογο» σύστημα αξιωμάτων). Έδειξε λοιπόν με αυτό τον τρόπο ότι η αξιωματική-αποδεικτική μέθοδος έχει κάποιου είδους όρια, και επομένως έθετε το ζωτικό και «επείγον» ζήτημα, του ποιά είναι αυτά.
Alan Turing	1912-1954, Βρεττανός. Ο «πατέρας» της θεωρίας υπολογισμού. Μετά το θεώρημα μη-πληρότητας του Gödel ένοιωσε το εξής ερώτημα: «ΟΚ – οι αποδείξεις έχουν όρια, αλλά μήπως άλλοι συμβολικοί χειρισμοί είναι σε θέση να τα καταφέρουν καλύτερα;» Για την απάντησή του έπρεπε να εξετάσει τον ισχυρότερο κατά το δυνατόν τύπο μηχανής ικανής για συμβολικούς χειρισμούς – την λεγόμενη πλέον μηχανή Turing (**1936**). Ο Turing εξήγησε γιατί αυτός ο τύπος μηχανής που εισηγήθηκε είναι *ο ισχυρότερος στον οποίο μπορούμε να ελπίζουμε*, αλλά ότι ακόμα και αυτός *δεν είναι σε θέση να επιλύσει όλα τα προβλήματα που θα θέλαμε να λύσουμε «αλγοριθμικά»*.

[2] Το «παράδοξο του Russel»: αν ένα σύνολο θεωρείται «ομαλό» αν δεν περιέχει τον εαυτό του, τότε το σύνολο των ομαλών συνόλων τί είναι: ομαλό ή ανώμαλο; Δεν μπορεί να είναι τίποτε από τα δύο...

	Κατά την διάρκεια του πολέμου εργάστηκε σε ένα είδος υπολογιστή, εξειδικευμένου στην επίλυση κρυπταναλυτικών προβλημάτων. Δεν ήταν ακριβώς ένας υπολογιστής όπως τον θέλουμε τώρα, αλλά ήταν αρκετός για να δείξει ότι ο υπολογισμός ήταν – μεταξύ άλλων – και ένα όπλο.
John von Neuman	1903-1957, Ούγγρος· (και τελικά πολίτης των ΗΠΑ). Ένας εξαιρετικά ευφυής μαθηματικός, ο οποίος δεν άφησε κλάδο στον οποίο να μην προσφέρει κατά καίριο τρόπο: ανάλυση, άλεβρα, κβαντική φυσική, θεωρία παιγνίων, θεωρία υπολογισμού, κά. Αμέσως μετά τον 2ο παγκόσμιο πόλεμο, το **1945**, ενεπλάκη στην ομάδα των ΗΠΑ για την κατασκευή του πρώτου «γνήσιου» υπολογιστή. Εκεί πρότεινε την υπολογιστική αρχιτεκτονική που φέρει το όνομά του, δηλαδή, της συσκευής με μία μνήμη, τόσο για το «πρόγραμμα» όσο και για τα «δεδομένα». Εν πολλοίς, αυτή την αρχιτεκτονική χρησιμοποιούμε ακόμα.
Noam Chomsky	1928 και εν ζωή, Αμερικανός. Προσωπικότητα όχι των μαθηματικών αλλά και της διεθνούς σκηνής. Ο Chomsky έγραψε πολλά για τις «τυπικές γλώσσες» την 10ετία '50-'60. Η μορφή αυτού του μαθήματος οφείλεται σε δικές του συνεισφορές, (λ.χ. στη χαρακτηριστική εργασία "*Three models for the description of a language*", **1956**).
η 2η πράξη	Στη δεκαετία του **1960** τα ηνία της θεωρίας υπολογισμού ανέλαβε ένας κλάδος αυτής, η «*θεωρία πολυπλοκότητας*», η οποία δεν ενδιαφέρεται μόνον για το ποιά προβλήματα λύνονται υπολογιστικά, αλλά κυρίως για το πόσο «γρήγορα» ή «οικονομικά» αυτό επιτυγχάνεται.

Η ιστορία (του «υπολογισμού») λοιπόν, όπως την διηγούνται τα επιτεύγματα των παραπάνω προσώπων είναι σε λίγες παραγράφους η εξής:

- Ήδη από την αρχαιότητα, (*Αριστοτέλης*, *Ευκλείδης*, *Στωικοί*, κά), είχε επισημανθεί ότι υπάρχουν λογικοί κανόνες, και ότι βάσει αυτών μπορεί και πρέπει να ασκούνται τα μαθηματικά. Είχε ήδη επισημανθεί η πρακτική και όχι μόνον, αξία των *κατασκευαστικών* μεθόδων, τις οποίες ο αρχαίος κόσμος σεβόταν πολύ και διαρκώς επεδίωκε.
- Παρά ταύτα, η κατάσταση στο χώρο της λογικής και των κατασκευαστικών μαθηματικών παρέμεινε στάσιμη όσο αφορά την κατανόηση των σχετικών εννοιών για εξαιρετικά μακρύ χρονικό διάστημα, (*μεσαιωνική* περίοδος και όχι μόνον).
- Κατά τον 19ο αιώνα η μελέτη της λογικής επανήλθε *με μαθηματικά πια εργαλεία*, και έγινα νέα καίρια, ιστορικού επιπέδου βήματα. Η αξιωματική και αποδεικτική μέθοδος του Ευκλείδη επαν-ισχυροποιήθηκε (*Boole*, *Frege*, *Peano*), και έγινε αποδεκτό ότι η απόδειξη όχι μόνον είναι μια «μηχανική» διαδικασία, αλλά καλύτερα που είναι τέτοια, διότι μόνον έτσι εξασφαλίζεται το αλάθητο και η βεβαιότητα για την ορθότητα της συλλογιστικής διαδικασίας (και άρα και των όποιων συμπερασμάτων).
- Επιφανείς μαθηματικοί, (όπως οι *Russel* και *Hilbert*), καταθέτουν όλη τους την εμπιστοσύνη στις «πεπερασμένες» αξιωματικές και αποδεικτικές μεθόδους, και κηρύσσουν ως πρόγραμμα των μαθηματικών την εύρεση μιας μεθόδου (διάβαζε: αλγορίθμου), για την διάγνωση της αλήθειας ή όχι, οποιουσδήποτε μαθηματικού ισχυρισμού.
- Διαπιστώθηκε γρήγορα, όμως, ότι η ορθή χρήση των λογικο-αποδεικτικών εργαλείων όχι μόνον δεν είναι προφανής (*Russel*), αλλά ότι ακόμα και αυτά υπόκεινται σε σοβαρούς περιορισμούς (*Gödel*).
- Τέλος, προκειμένου να διαπιστωθεί με τον πιο σαφή και τελεσίδικο τρόπο τί είδους κατασκευαστικές διαδικασίες έχουμε στη διάθεσή μας, και τί είδους χειρισμούς είμαστε σε θέση να κάνουμε «μηχανικά», ο *Turing* καταλήγει στις ομώνυμες μηχανές. Ακολουθούν και άλλοι, την ίδια εποχή (Kleene, Church, Markov, Neuman), οι οποίοι διευκρινίζουν το θέμα των «μηχανών», της «υπολογισιμότητας», των «προγραμμάτων» κτλ., και ανοίγουν εφεξής το πεδίο της κατασκευής υπολογιστικών συσκευών. Και αυτές δεν άργησαν να φανούν – αλλά αυτό είναι άλλη ιστορία.



BEGRIFFSSCHRIFT,

EINE DER ARITHMETISCHEN NACHGEBILDETE

FORMELSPRACHE

DES REINEN DENKENS.

VON

Dr. GOTTLOB FREGE.

HALLE a/S.

VERLAG VON LOUIS NEBERT.

1879.

PROCEEDINGS

OF

THE LONDON MATHEMATICAL SOCIETY.

SERIES 2.—VOL. 42.—PART 3.

CONTENTS.

	PAGE
ON THE PROJECTIVE CLASSIFICATION OF SURFACES (*continued*): LEONARD ROTH	161
ON A WARING'S PROBLEM WITH SQUARES OF LINEAR FORMS: CHAO KO ...	171
A MEAN VALUE THEOREM FOR ANALYTIC FUNCTIONS: J. M. WHITTAKER ...	186
FUNCTIONS WITH DOMINANT SINGULARITIES OF THE GENERALIZED ALGEBRAIC-LOGARITHMIC TYPE: R. WILSON	196
ON COMPUTABLE NUMBERS, WITH AN APPLICATION TO THE ENTSCHEIDUNGS-PROBLEM: A. M. TURING	230

Issued November 30th, 1936.

LONDON

PRINTED AND PUBLISHED FOR THE SOCIETY BY

C. F. HODGSON & SON, LTD.,

2 NEWTON STREET, KINGSWAY, W.C.2.

*Εικόνες: Το εξώφυλλο της «εννοιογραφίας» του G. Frege (*1879, *αριστερά), και το εξώφυλλο του περιοδικού PLMS, που περιείχε το αφετηριακό άρθρο του A. Turing (*1936, *δεξιά).*

2ο Τρία κεντρικά παραδείγματα τρόπων υπολογισμού.

Θα αρχίσουμε αυτή την εισαγωγική ξενάγηση στη θεωρία του υπολογισμού, με μια επίσκεψη στις πρώτες σχετικές θεμελιακές έννοιες. Θα χρησιμοποιήσουμε μερικά απλά και σύντομα παραδείγματα, και συγκεκριμμένα τρείς συνηθισμένους τύπους υπολογισμού· τον πρώτο μάλιστα τον μαθαίνουμε σε πολύ μικρή ηλικία... Κάθε βέλος «→» δείχνει (προς) την εκάστοτε επόμενη φάση του υπολογισμού.

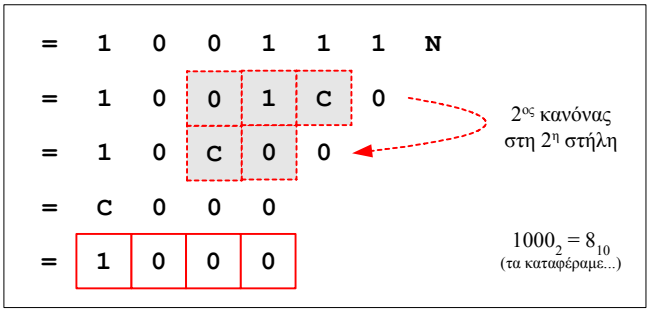
Ι. «Συμβολικοί χειρισμοί»: η δεκαδική πρόσθεση.
Ας θυμηθούμε πως γίνεται μία πρόσθεση με τον κλασσικό τρόπο – εκείνο κατά τον οποίο παραθέτουμε τα ψηφία των δύο προσθετέων το ένα κάτω από το άλλο. Πάνω από τον 1ο προσθετέο σημειώνουμε τα «κρατούμενα»:

```
(* ------------------------------------------------------------ *)
      000          000          010          100    (κρατούμενα)
      ---          ---          ---          ---
      384    →     384    →     384    →     384    →      384     OK
      663          663          663          663           663
      --- +        --- +        --- +        --- +        ---- +
                     7            47          047          1047
(* ------------------------------------------------------------ *)
```

Για τους σκοπούς μας αποτελεί θεμελιώδη παρατήρηση ότι ο παραπάνω υπολογισμός (η άθροιση δύο αριθμών) και όσοι θα δούμε παρακάτω, γίνονται βάσει κάποιων ***οδηγιών*** οι οποίες μας είναι γνωστές εκ των *προτέρων*, και τις οποίες ακολουθούμε κατά βήμα. Συναντούμε πλήθος τρόπων διατύπωσης αυτών των οδηγιών. Εδώ θα αναφερθούμε στις οδηγίες της πρόσθεσης στη δυαδική μορφή της αντί της δεκαδικής (για συντομία), και θα προσθέσουμε το $5_{10} = 101_2$ με το $3_{10} = 011_2$ με βάση τους κανόνες που θα γράψουμε στη συνέχεια. Ως δεδομένα γράφουμε τα ψηφία των προσθετέων εναλλάξ (το 101 + 011 γράφεται 100111), και τα σύμβολα '=' στην αρχή και 'N' και το τέλος. Οι κανόνες άθροισης έχουν ως εξής:

```
(* ------------------------------------------------------------ *)
      00N → N0   00C → N0    (N = όχι κρατούμενο,
      01N → N1   01C → C0     C = έχω κρατούμενο)
      10N → N1   10C → C0
      11N → C0   11C → C1
       =N →  =    =C → =1
(* ------------------------------------------------------------ *)
```

Ακολουθώντας αυτούς τους κανόνες έχουμε τα εξής βήματα για τη πρόσθεση $5_{10}+3_{10} = 1000_2$:



Σχήμα: Μια όψη της δυαδικής πρόσθεσης.

Αυτό που θέλουμε να κρατήσουμε από το παραπάνω σύντομο παράδειγμα, είναι ότι σε αυτόν τον τύπο «υπολογισμού» ***χειριζόμαστε σύμβολα***, τα οποία βάσει οδηγιών απλώς είτε διαβάζουμε, είτε γράφουμε είτε σβήνουμε.

II. «Συναρτησιακοί χειρισμοί»: ο υπολογισμός ενός παραγοντικού.
Η σειρά των σταδίων του υπολογισμού του N! (συνάρτηση «παραγοντικό») για N λ.χ. ίσο με 4 έχει ως εξής:

```
(* ------------------------------------------------------ *)
                    4!   → (3! × 4)
                         → ((2!×3)×4)
                         → (((1!×2)×3)×4)
                         → (((1×2)×3)×4)
                         → ((2×3)×4)
                         → (6×4)
                         → 24
                         OK
(* ------------------------------------------------------ *)
```

Ποιές είναι οι σχετικές «***οδηγίες***»; Διότι δεν επαρκεί να γράψουμε ως οδηγίες για τον υπολογισμό του N! την σχέση: N! = 1 × 2 × ... × N–1 × N. Τί είδους «οδηγία» θα ήσαν τα αποσιωπητικά '...'; Ακόμα και εάν εδώ σημαίνει κάτι συγκεκριμμένο σε *εμάς*, αυτά τα αποσιωπητικά θα σημαίνουν για *εμάς* κάτι διαφορετικό σε άλλο πλαίσιο, και δεν θα σημαίνουν τελικά τίποτε για *μια μηχανή*. Γνωρίζουμε όμως τον *αναδρομικό* ορισμό της συνάρτησης του παραγοντικού: συμβολίζουμε με Φ(ν) την συνάρτηση του παραγοντικού, (με όρισμα το ν), και γράφουμε:

```
(* ------------------------------------------------------ *)
                        | εάν ν=1   τότε Φ(ν) = 1
            Φ(ν)   =    |
                        | εάν ν>1   τότε Φ(ν) = Φ(ν-1) × ν
(* ------------------------------------------------------ *)
```

Η εκτέλεση αυτών των οδηγιών γίνεται τότε:

```
(* ------------------------------------------------------ *)
                Φ(4)              = Φ(4–1)×4        (ν>1)
                = Φ(3)×4          = Φ(3–1)×3×4      (ν>1)
                = Φ(2)×3×4        = Φ(2–1)×2×3×4    (ν>1)
                = Φ(1)×2×3×4      = 1×2×3×4         (ν=1)
                = 24              OK
(* ------------------------------------------------------ *)
```

Αυτό που θέλουμε να κρατήσουμε από το παραπάνω παράδειγμα είναι ότι σε αυτόν τον «υπολογισμό» ***χειριζόμαστε συναρτήσεις***, τις οποίες βάσει οδηγιών είτε εφαρμόζουμε αμέσως (αν είναι πολύ απλές, όπως λ.χ. η αφαίρεση του 1), είτε τις συνθέτουμε, είτε τις ανάγουμε σε υπολογισμό άλλων συναρτήσεων (ακόμα και αναδρομικά), κοκ.

III. «(Υψηλές) γλώσσες προγραμματισμού»: η διχοτομική αναζήτηση.
Το τελευταίο παράδειγμά μας είναι ένας «αλγόριθμος» που είναι πανταχού παρών στην αλγοριθμική: η διχοτομική αναζήτηση. Έχουμε στη διάθεσή μας έναν πίνακα T με N στοιχεία (λ.χ. αριθμούς), τα οποία είναι ταξινομημένα κατ' αύξουσα σειρά. Θα θέλαμε για οποιαδήποτε στοιχείο σ να είμαστε σε θέση να διαπιστώνουμε «γρήγορα» εάν αυτό συμπεριλαμβάνεται στον πίνακα T ή όχι, (και γενικότερα εάν συμπεριλαμβάνεται στις θέσεις από L έως και R).

Το τέχνασμα της διχοτομικής αναζήτησης είναι να «κόψουμε» τον πίνακα σε δύο τμήματα: στις θέσεις από L έως M (με τα «μικρότερα» στοιχεία), και στις θέσεις από M έως R (με τα «μεγαλύτερα» στοιχεία) για κάποιο M ανάμεσα στα L και R. Στη συνέχεια διαπιστώνουμε, χάρι στη ταξινόμηση, σε ποιό από τα δύο τμήματα είναι (ή θα έπρεπε να είναι...) το αναζητούμενο στοιχείο σ, και επαναλαμβάνουμε την αναζήτηση με τον ίδιο τρόπο, περιοριζόμενοι σε αυτό το τμήμα.

Δίνουμε ένα παράδειγμα με N = 11 στοιχεία, L = 1, R = N, και σ = 55. Σε κάθε φάση του «υπολογισμού» ορίζουμε το μεσαίο στοιχείο M = (L+R) δια 2, και εάν το στοιχείο σ κριθεί...

- μικρότερο από το T[M], επανερχόμαστε στο τμήμα T[L=M+1 ... R].
- μεγαλύτερο από το T[M], επανερχόμαστε στο τμήμα T[L ... R=M–1].
- αλλιώς, είναι ίσο με το T[M] τότε OK, το έχουμε εντοπίσει.

L	M	R	OK	σ	T[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]	Περιέχεται
1	?	11	Ψ	55	5	9	13	16	23	32	45	52	64	74	88	?
1	6	11	Ψ	55	5	9	13	16	23	32	45	52	64	74	88	?
7	6	11	Ψ	55	5	9	13	16	23	32	45	52	64	74	88	?
7	9	11	Ψ	55	5	9	13	16	23	32	45	52	64	74	88	?
7	9	8	Ψ	55	5	9	13	16	23	32	45	52	64	74	88	?
7	7	8	Ψ	55	5	9	13	16	23	32	45	52	64	74	88	?
8	7	8	Ψ	55	5	9	13	16	23	32	45	52	64	74	88	?
8	8	8	Ψ	55	5	9	13	16	23	32	45	52	64	74	88	?
9	8	8	Ψ	55	5	9	13	16	23	32	45	52	64	74	88	?
9	**8**	8	Ψ	55	5	9	13	16	23	32	45	52	64	74	88	ΨΕΥΔΕΣ

Σχήμα: η εκτέλεση μιας «διχοτομικής αναζήτησης»
(«κίτρινο» = οι μεταβολές τιμών, «γκρί» = η περιοχή αναζήτησης T[L...R], «πράσινο»: το T[M])

Τις όποιες (και σαφώς πιο περίπλοκες) ***οδηγίες*** της παραπάνω διχοτομικής αναζήτησης, θα τις γράφαμε σε μια «ψευδογλώσσα», ή καλύτερα σε μια γλώσσα «υψηλού επιπέδου» όπως παρακάτω. Η εκτέλεση θα γινόταν με τον τρόπο που διδασκόμαστε στα μαθήματα προγραμματισμού:

Αλγόριθμος: «Διχοτομική αναζήτηση».

```
Συνάρτηση Περιέχεται(T: πίνακας, L,R: φυσικός, σ: στοιχείο): ΑΛΗΘΕΣ/ΨΕΥΔΕΣ

// T πίνακας στοιχείων, ταξινομημένα κατ' αύξουσα σειρά .

{ OK ← ΨΕΥΔΕΣ
  Εφόσον (L ≤ R) και όχι OK
  { M ← (L+R) δια 2                                  // λ.χ. ((3+6) δια 2)=4
    Περίπτωση
    { σ < T[M]: { R ← M-1 }
      σ = T[M]: { OK ← ΑΛΗΘΕΣ }
      σ > T[M]: { L ← M+1 }
  } }
  Περιέχεται ← OK
}
```

Αυτό που θέλουμε να κρατήσουμε από το παράδειγμα της διχοτομικής αναζήτησης, είναι ότι στους «υπολογισμούς» αυτού του είδους ***χειριζόμαστε ένα περιβάλλον «μεταβλητών»***, τις οποίες βάσει οδηγιών [3] είτε ανακαλούμε προς χρήση, είτε ενημερώνουμε με νέες τιμές.

Θα χρειαστούμε μια μακρά πορεία για να προσδιορίσουμε και να «αναλύσουμε» μαθηματικά τα παραπάνω είδη οδηγιών και υπολογισμού. Φαίνεται όμως, ότι ο συμβολικός/γραμματικός τρόπος είναι ο πλέον θεμελιακός, διότι σε κάθε περίπτωση οι χειρισμοί μας δεν γίνονται «στον αέρα»: είτε με τον ένα είτε με τον άλλον τρόπο, κάτι θα «γράψουμε». Με αυτόν τον τρόπο υπολογισμού θα αρχίσουμε την ξενάγηση, ήδη από την επόμενη ενότητα.

[3] Οι οποίες δεν είναι και τόσο απλές – θα πρέπει να παραδεχθούμε...

3ο Ο «συμβολικός» τρόπος υπολογισμού – σύνταξη και σημασία.

Αναφερόμενοι στη προηγούμενες ενότητα οι εξής ορολογία και έννοιες θα είναι τα πρώτα θεμέλια της θεωρίας μας:

Αλφάβητο (Σ)

Ένα αυθαίρετο πεπερασμένο σύνολο ***συμβόλων*** $\Sigma = \{ \sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_\nu \}$.
Συνήθως το αλφάβητο Σ περιέχει τουλάχιστον δύο σύμβολα, $|\Sigma| \geq 2$, αλλά μπορεί και να έχει μόνον ένα.

Χρησιμοποιούμε το αλφάβητο για την *παράσταση* των οποιωνδήποτε πληροφοριών, ή την *περιγραφή* των οποιωνδήποτε αντικειμένων, σκοπεύουμε να χειριστούμε υπολογιστικά. Τα συνηθισμένα γράμματα, τα αριθμητικά ψηφία και μερικά σημεία στίξης είναι υπεραρκετά για μια φυσική παράσταση οποιασήποτε πληροφορίας. Θεωρητικά (και πολύ πρακτικά, π.χ. στα ολοκληρωμένα κυκλώματα) ένα *δυαδικό* αλφάβητο δύο συμβόλων, «0» και «1», είναι επαρκές.

Λέξη (λ)

Ως λέξη θα θεωρούμε μια πεπερασμένη ακολουθία λ, συμβόλων εκ του αλφαβήτου που έχουμε επιλέξει: $\lambda = \alpha_1 \alpha_1 ... \alpha_\nu$, $\alpha_\kappa \in \Sigma$, $\kappa = 1, ..., \nu$. Το ν είναι το ***μήκος*** της λέξης και θα το συμβολίζουμε $|\boldsymbol{\lambda}|$. Επιτρέπουμε την τιμή ν = 0, στην οποία περίπτωση θεωρούμε ότι η λέξη μας είναι ***κενή*** και θα την συμβολίζουμε με το σύμβολο ∅. Το σύνολο όλων των (πεπερασμένων, πάντοτε) λέξεων εξ ενός αλφαβήτου Σ θα το συμβολίζουμε με $\boldsymbol{\Sigma}^*$.

Τί «είναι» οι λέξεις; Όταν υπολογίζουμε, υπάρχουν πράγματα που «θυμόμαστε», «σημειώσεις» που κρατάμε (λ.χ. στη μνήμη μιας συσκευής). Αυτά θα τα παριστάνουμε συμβολικά με *μία* λέξη. Επιλεγμένα σύμβολα που χρησιμοποιούνται ως σημεία «στίξης» είναι δυνατόν να ενώνουν συμβατικά πολλές λέξεις σε μία. Το παρόν κείμενο π.χ. μπορεί να θεωρηθεί ως *μία* λέξη με σημεία στίξης το «διάστημα», την «τελεία», τις «παύλες», τις «παρενθέσεις», κά.

Με μια λέξη παριστάνουμε τα δεδομένα που έχουμε, την διαθέσιμη σε μας πληροφορία, δηλαδή την *περιγραφή* των αντικειμένων που χειριζόμαστε. Το ότι αυτή είναι μια απλή μονοδιάστατη σειρά συμβόλων, ενώ μπορούμε να σκεφτούμε λ.χ. ακόμα και μια δισδιάστατη «πληροφορία», δεν μας οδηγεί σε απώλεια γενικότητας, διότι αυτή η σειρά δεν αντιστοιχεί παρά στη χρονική σειρά με τα οποία ούτως ή άλλως θα τα εξετάσουμε. Ό,τι εμείς, ή μια υπολογιστική συσκευή, εξετάζει «***σε ένα βήμα***» της, αυτό το θεωρούμε ως ένα ***σύμβολο***, και η σειρά της εξέτασης αντιστοιχεί στη λέξη που θεωρούμε ως τα δεδομένα μας. (Το πρακτικό αντίστοιχο μιας λέξης είναι τα γνωστά «αρχεία» των υπολογιστών μας – μια σειρά δηλαδή από «χαρακτήρες».)

Υπολογισμός (υ)

Υπολογισμός υ, είναι (κατ' αρχάς) μια ακολουθία λέξεων $\upsilon_0, \upsilon_1, \upsilon_2, ..., \upsilon_\nu, ...$ δηλαδή μια απεικόνιση του **N** (οι φυσικοί) στο Σ^*.
Διακρίνουμε τα εξής επί μέρους:

- κάθε λέξη της ακολουθίας υ_κ, καλείται ένα ***στάδιο*** ή ***φάση*** υπολογισμού.
- κάθε ζεύγος διαδοχικών σταδίων $(\upsilon_\kappa , \upsilon_{\kappa+1})$ καλείται ένα *βήμα* υπολογισμού.
- κρατάμε κατ' αρχάς το ενδεχόμενο η ακολουθία/υπολογισμός να είναι άπειρος, αλλά στις πρακτικές περιπτώσεις μας ενδιαφέρει, φυσικά, αυτός να ***περατούται***. Προς τούτο πρέπει να υπάρχει τελικό στάδιο $\upsilon_{\text{τελικο}}$ ώστε για $\kappa > \tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{o}$ να ισχύει κάποια συνθήκη η οποία (κατά σύμβαση) να σημαίνει ότι ο υπολογισμός μας έχει περατωθεί: λ.χ. $\upsilon_\kappa = \varnothing$. Το πρώτο τέτοιο ν είναι το ***μήκος*** του υπολογισμού. Εάν ο υπολογισμός υ περατούται θα γράφουμε με «$\upsilon\downarrow$» (ή: υπολογισμός «συγκλίνει»)· αλλοιώς θα γράφουμε «$\upsilon\uparrow$» (ή: ο υπολογισμός «αποκλίνει»)

Πρόγραμμα
(π)

Τα προγράμματα ορίζουν τα επιτρεπτά βήματα ενός υπολογισμού, προσδιορίζουν δηλαδή το πότε δύο στάδια υπολογισμού φ και φ' μπορούν να θεωρηθούν διαδοχικά, $\phi = \upsilon_\kappa$ και $\phi' = \upsilon_{\kappa+1}$. Κάθε πρόγραμμα αντιστοιχεί σε μια *σχέση* λέξεων, που θα αποκαλούμε *βήματα*(π).

Είναι καίριο χαρακτηριστικό ενός υπολογισμού ότι τα στάδια του δεν διαδέχονται το ένα το άλλο κατά τυχαίο ή αυθαίρετο τρόπο – άλλως θα υπολογίζαμε τη λύση των προβλημάτων μας σε ένα (έστω μακρύ & αυθαίρετο) κατ' ευθείαν βήμα από τα δεδομένα στα επιθυμητά αποτελέσματα...

Τα βήματα ενός υπολογισμού δεν μας ενδιαφέρει να προκύπτουν αυθαίρετα, αυθόρμητα ή κατόπιν έμπνευσης· το κάθε επόμενο στάδιο υπολογισμού πρέπει σχετίζεται με το προηγούμενο σύμφωνα με κάποιες *προ-καθορισμένες* οδηγίες, αυτές που αποκαλούμε ***πρό-γραμμα***. Όλα τα ενδεχόμενα στάδια και βήματα υπολογισμού είναι όμως απείρου πλήθους και γι' αυτό δεν μπορούμε να περιγράψουμε ένα πρόγραμμα π παραθέτοντας όλα τα ζεύγη $(\upsilon_\kappa, \upsilon_{\kappa+1})$ αυτής της σχέσης: υπό αυτή την προοπτική η σχέση π αποτελεί απειρομέγεθες αντικείμενο.

Μπορούμε (;) όμως να την «συνοψίσουμε» σε μια συμβολική περιγραφή: τα προγράμματα δηλαδή *είναι* λέξεις $\pi \in \Sigma^*$, που *περιγράφουν* σχέσεις, τα *βήματα*(π). Π.χ. στα προηγούμενα γράψαμε «01C → C0» εννοώντας ότι:

«οποιοδήποτε $\upsilon_\kappa = \alpha\ 0\ 1\ C\ \beta$, $(\alpha, \beta \in \Sigma^*)$, μπορεί να γίνει $\upsilon_{\kappa+1} = \alpha\ C\ 0\ \beta$»,

Προφανώς, εάν χρειαζόμαστε έναν ολόκληρο υπολογισμό για να οδηγηθούμε στο επόμενο βήμα, τότε υποπίπτουμε σε φαύλο κύκλο: χρησιμοποιούμε υπολογισμούς για να ορίσουμε τα βήματα των υπολογισμών και ο ορισμός μας είναι δώρον-άδωρον.

Κάθε *βήμα υπολογισμού* $(\upsilon_\kappa, \upsilon_{\kappa+1})$ κατά το πρόγραμμα π, δηλαδή η «εφαρμογή» του π επί ενός τρέχοντος σταδίου υ_κ, θα πρέπει να είναι κάποιο *τετριμμένο καθήκον, ευνόητο, χωρίς ανάγκη περαιτέρω ανάλυσης σε απλούστερα, και εκτελέσιμο μηχανικά χωρίς χρήση «διαίσθησης» ή «έμπνευσης»*· (όπως λ.χ. η προηγούμενη γραμματική αντικατάσταση του 01N με N1). Έτσι ***γράφουμε*** μεν μια λέξη (που είναι πεπερασμένο αντικείμενο) αλλά ***εννοούμε*** μια ολόκληρη συνάρτηση (που είναι άπειρο αντικείμενο).

> ***Σημείωση:*** Είναι πράγματι προκλητικό να ταυτίσει κάποιος τους λεγόμενους ***αλγορίθμους*** με όλα τα προγράμματα· τότε όμως πώς θα συμβιβάσουμε το σαφές εμπειρικό γεγονός, που αντιλαμβάνονται αμέσως όλοι όσοι προγραμματίζουν, ότι έχουμε την δυνατότητα να προγραμματίσουμε σε εντελώς διαφορετικές «γλώσσες προγραμματισμού» τον *ίδιο*, κατά κάποια έννοια, αλγόριθμο; Αυτό σημαίνει ότι η έννοια «αλγόριθμος» είναι κάτι πιο γενικό ή αφηρημένο από ότι η έννοια «πρόγραμμα», εδώ όμως δεν θα θίξουμε αυτό το θέμα: θα εξετάσουμε διάφορους γενικούς τρόπους υπολογισμού και προγραμματισμού, ταυτίζοντας (εδώ χωρίς βλάβη) την έννοια «αλγόριθμος» με την έννοια «πρόγραμμα».

Συντακτικοί και σημασιολογικοί κανόνες.

Συντακτικοί κανόνες:
Υπάρχουν απείρου πλήθους προβλήματα την λύση των οποίων θα θέλαμε να υπολογίζουμε, και προφανώς χρειαζόμαστε προς τούτο άπειρο πλήθος προγραμμάτων που θα θέλαμε να γράψουμε· δεν μπορούμε δηλαδή να έχουμε έναν πλήρη εξαντλητικό κατάλογο όλων των «προγραμμάτων».
Αντί γι' αυτό έχουμε ένα *σύστημα κανόνων με βάσει το οποίο μπορούμε να συντάξουμε όλα τα δυνατά προγράμματα* (ή: οδηγίες, ή εντολές, κτλ) που επιτρέπει ο τρόπος προγραμματισμού που έχουμε προτιμήσει. Οι κανόνες αυτοί λέγονται ***συντακτικοί***

κανόνες. Προφανώς η εφαρμογή τους θα πρέπει να είναι απλή και άμεσα κατανοητή.
Κάθε πρόγραμμα λοιπόν, π, συντεταγμένο σύμφωνα με τους κανόνες μας, υποδηλώνει ένα τρόπο να κάνουμε βήματα στον υπολογισμό μας· υποδηλώνει δηλαδή μια ***σχέση μετάβασης*** από στάδιο υπολογισμού σε επόμενο στάδιο υπολογισμού:

$$\textit{βήματα}(\pi) = \{(\phi', \phi''): \phi', \phi'' \text{ διαδοχικά στάδια ή φάσεις υπολογισμού }\}$$

Ο αυστηρός και ακριβής ορισμός του πώς υπολογίζουμε για κάθε πρόγραμμα π, το «νόημά» του, τον τρόπο δηλαδή της επίδρασής του στο εκάστοτε στάδιο $υ_κ$, αποτελεί τους ***σημασιολογικούς κανόνες*** του προγραμματικού τρόπου που έχουμε προτιμήσει, και δίδονται από τον ορισμό, με οποιονδήποτε εξυπηρετικό τρόπο, της σχέσης *βήματα*(π).

Π.χ., στο 1ο παράδειγμα της προηγούμενης ενότητας, τα «προγράμματα» ήσαν σύνολα από οδηγίες της μορφής $λ \to λ'$, δηλαδή ζεύγη λέξεων (λ, λ'), και το νόημα ενός ζεύγους ήταν:

«εάν το στάδιο $υ_κ$ (ως λέξη) περιέχει τη λέξη λ τότε ως επόμενο στάδιο $υ_{κ+1}$ επιτρέπεται αυτό που προκύπτει εάν αντικαταστήσουμε τη λ με τη λ'»

ΣΥΝΤΑΞΗ	ΣΗΜΑΣΙΑ:
«$\boldsymbol{λ \to λ'}$»	«$\boldsymbol{α\, λ\, τ \to α\, λ'\, τ}$», $α, τ \in Σ^*$
	***βήματα*(π) =**
	$1\,λ\,0\,0 \to 1\,λ'\,0\,0$
	$1\,0\,1\,λ\,1 \to 1\,0\,1\,λ'\,1$
	$λ\,1 \to λ'\,1$
	$1\,λ\,0 \to 1\,λ'\,0$
	…
	$1\,0\,1\,λ \to 1\,0\,1\;\; λ'$
	κοκ

(Βλ. στο 1ο παράδειγμα της προηγούμενης ενότητας, στο σχετικό σχήμα, την διαγραφή του **01C**, και την αντικατάστασή του από το **C0**).

Στο σημείο αυτό φαίνεται καθαρά πόσο «απλός» είναι ο γραμματικός τρόπος υπολογισμού. Για να γράψουμε σε αυτόν ένα πρόγραμμα (= *η σύνταξη*) αρκεί:
- να διαλέξουμε ένα αλφάβητο συμβόλων Σ,
- να διαλέξουμε ένα πεπερασμένο σύνολο π από ζεύγη (λ, λ') λέξεων του Σ*,

και… τέλος· έχουμε ένα «συντακτικώς ορθό» πρόγραμμα π.

Και για να ερμηνεύσουμε ένα πρόγραμμα π (= *η σημασία*) αρκεί:
- να εξετάζουμε το εκάστοτε στάδιο υπολογισμού $υ_κ$ εάν περιέχει την (υπο)λέξη λ,
- να την αντικαθιστούμε με τη λέξη λ' παράγοντας το νέο στάδιο $υ_{κ+1}$,

και τέλος· έχουμε εκτελέσει ένα επιτρεπτό βήμα του υπολογισμού υ ως προς π.

Για να εκτιμήσετε αυτή την απλότητα αρκεί να ανακαλέσετε τυχόν μαθήματα που έχετε παρακολουθήσει για μια γλώσσα προγραμματισμού «υψηλού επιπέδου», όπως λ.χ. η C, και να προσέξετε το πόσο δύσκολη είναι η εξήγηση του ποιά προγράμματα C είναι σωστά γραμμένα (= η *σύνταξη* της C), και ποιά όχι· (οι σχετικές εξηγήσεις καλύπτουν συχνά δεκάδες, αν όχι περισσότερες, σελίδες). Ή ακόμα χειρότερα, το πόσο δύσκολη είναι η εξήγηση του τί *αποτέλεσμα* θα έχει κάθε (;) εντολή της C, σε

κάθε (;) περιβάλλον μεταβλητών (= η <u>σημασία</u> της C) [4].

Η κατακλείδα είναι μια πρωτόλεια περιγραφή του τί κάνει ένα «πρόγραμμα»: δίδει μια σχέση «***παράγει(π, δ, υ)***», τριών παραμέτρων:

- του προγραμματος π.
- των δεδομένων δ, και,
- του υπολογισμού υ.

παράγει(π, δ, υ)

= «***Το πρόγραμμα π, με δεδομένα δ, παράγει τον υπολογισμό υ***»

$\Leftrightarrow$

$(\text{το } \upsilon_0 \text{ περιέχει τα } \delta) \wedge \forall \kappa \geq 0\ ((\upsilon_\kappa, \upsilon_{\kappa+1}) \in \text{βήματα}(\pi))$

Συνοψίζουμε, στον επόμενο πίνακα, τον συμβολισμό και την ορολογία/έννοιες που χρησιμοποιήσαμε:

N	οι φυσικοί αριθμοί.
Σ	το (πεπερασμένο) ***αλφάβητο*** που χρησιμοποιούμε.
Σ*	όλες οι (πεπερασμένες) ***λέξεις*** του αλφαβήτου Σ.
σ, α, β	***σύμβολα*** του αλφαβήτου.
λ	μια λέξη από το χρησιμοποιούμενο αλφάβητο: λ ∈ Σ*.
λ[κ]	το κ-οστό σύμβολο της λέξης λ.
|λ |	το ***μήκος*** της λέξης λ.
∅	η ***κενή λέξη*** (με μηδενικό πλήθος συμβόλων).
$\sigma^{(\kappa)}$	μια λέξη αποτελούμενη από κ ∈ **N** σύμβολα «σ» στη σειρά.
π	ένα ***πρόγραμμα***: μια λέξη του π ∈ Σ*, συχνά ένα σύνολο «οδηγιών».
βήματα(π)	η ***σημασία*** ενός προγράμματος βήμα-προς-βήμα: μια σχέση ⊆ Σ* × Σ*.
υ	ο ***υπολογισμός***: μια ακολουθία λέξεων: **N** → Σ*.
υ_κ, υ[κ]	το κ-οστό ***στάδιο*** του υπολογισμού υ.
υ↓ , υ↑	ο υπολογισμός ***συγκλίνει*** (ή ***τερματίζει***, ή ***περατούται***) ή ***αποκλίνει***.

[4] Αξίζει να ελέγξει κάποιος εάν μια τέτοια εξήγηση έχει ποτέ δοθεί *πλήρως*, και εάν χωράει σε λιγότερες από αρκετές εκατοντάδες σελίδες. Επίσης, το πόσο «φυσική» και ευνόητη είτε είναι, είτε θα μπορούσε να γίνει...

4ο Οι μηχανές Turing.

Αναφερόμενοι στην προηγούμενη ενότητα, η απλή συντακτική μορφή των εντολών $\lambda \rightarrow \lambda'$ είναι επιφανειακή. Η ανάλυση των δυνατοτήτων τους παραμένει εξαιρετικά περίπλοκη (αφού λ.χ. η προς αντικατάσταση λέξη λ μπορεί να εμφανίζεται «και εδώ και εκεί» με ανεξέλεγκτο τρόπο). Η οδός που ακολούθησε η θεωρία υπολογισμού είναι να περιορίσει αυτή την μορφή, και να μελετήσει ακόμα απλούστερες μορφές. Τέσσερεις μορφές έπαιξαν τελικά ρόλο, με τον εξής τρόπο:

- Επιλέγουμε ένα αλφάβητο ***τερματικών*** συμβόλων Σ, τα οποία είναι και το κυρίως αντικείμενο των γραμματικών χειρισμών μας. Θα τα γράφουμε ως ***πεζά*** σύμβολα, λ.χ. α, β, γ, σ.
- Επιλέγουμε ένα αλφάβητο ***παραγωγικών*** συμβόλων Σ_K, με τα οποία «θυμόμαστε» τί είδους εργασία επιτελούμε και πού. Θα τα γράφουμε ως ***κεφαλαία*** σύμβολα, λ.χ. Κ, Λ, Ι, Τ.
- Εξετάζουμε προγράμματα φτιαγμένα από τα εξής είδη εντολών, $\lambda \rightarrow \lambda'$:

λ		**λ′**	
Κ	→	∅	Ένα παραγωγικό σύμβολο Κ είτε,
Κ	→	λ Κ′	▪ είτε καταργείται, τερματίζοντας την παραγωγή. ▪ είτε αντικαθίσταται από μια λέξη λ και *ένα* νέο παραγωγικό σύμβολο Κ′. Ίσως η απλούστερη ενδιαφέρουσα δυνατή περίπτωση. Αυτή θα μελετήσουμε στο Α′ μέρος αυτών των σημειώσεων.
Κ	→	∅	Ένα παραγωγικό σύμβολο Κ είτε,
Κ	→	λ K_1 K_2	▪ είτε καταργείται, τερματίζοντας την παραγωγή. ▪ είτε αντικαθίσταται από μια λέξη λ και *δύο* νέα παραγωγικά σύμβολα K_1, K_2. Μια ειδική περίπτωση πρακτικώς εξαιρετικά χρήσιμη, όπως θα φανεί στο Β′ μέρος αυτών των σημειώσεων.
α Κ β	→	α β	Το ίδιο, περίπου, όπως και πριν, αλλά τώρα το τί και πώς θα συμβεί
α Κ β	→	α λ K_1 K_2 β	εξαρτάται όχι από το Κ και μόνον, αλλά και από τα «*συμφραζόμενα*» α και β. Εδώ δεν θα εξετάσουμε αυτή την περίπτωση.
		'*Turing*'	(βλ. παρακάτω).)

Η 4η περίπτωση ήταν και η... αρχική, αυτή στην οποία «πήδηξε» κατ' ευθείαν, (από διαίσθηση;) ο ίδιος Turing το 1936. Επειδή αυτή καλύπτει όλες τις άλλες, θα την παρουσιάσουμε στη συνέχεια, αν και για την ανάλυσή της θα χρειαστεί να επανέλθουμε στο Γ′ μέρος αυτών των σημειώσεων.

Η γραμματική μορφή των μηχανών Turing.
Για να φτιάξουμε μια μηχανή Turing Τ, αρκούν τα εξής βήματα:

- Επιλέγουμε ένα αλφάβητο τερματικών συμβόλων Σ, τα οποία είναι και το κυρίως αντικείμενο των γραμματικών χειρισμών μας.
- Επιλέγουμε ένα αλφάβητο παραγωγικών (ή μη-τερματικών συμβόλων) συμβόλων Σ_K, με τα οποία κατά κάποια έννοια θυμόμαστε τί είδους «εργασία» έχουμε να επιτελέσουμε και «πού».
- Επιλέγουμε ως πρόγραμμα της μηχανής ένα ***σύνολο οδηγιών***. Ως ***οδηγία*** θεωρούμε οποιαδήποτε οποιοδήποτε ζεύγος λέξεων (λ, λ′) με μία από τις παρακάτω τρείς ειδικές μορφές, (όπου τα σ, σ′, τ, είναι τερματκά σύμβολα, και το Κ παραγωγικό σύμβολο):

```
   λ    →     λ′
-----------------
τ K σ →  τ  σ′ K′      ή,
```

$$\tau\ K\ \sigma \rightarrow \tau\ K'\ \sigma' \quad \text{ή,}$$
$$\tau\ K\ \sigma \rightarrow K'\ \tau\ \sigma'$$

(Αγνοείστε τα «κενά διαστήματα»: έχουν τεθεί απλώς για να διευκολύνουν την ανάγνωση.) Μια ματιά στον τύπο αυτών των οδηγιών αποκαλύπτει τις προθέσεις μας:

- μεταβάλλουμε μόνο ένα τερματικό σύμβολο σε κάθε βήμα, από σ σε σ′, και συγκεκριμμένα το σύμβολο που το παραγωγικό σύμβολο K «βλέπει» στα δεξιά του.
- μεταβάλλουμε το σύμβολο κατάσταση K σε ένα νέο K′.
- μετακινούμε το σύμβολο κατάσταση K′ κατά 0, ±1 θέσεις.

Συντακτικοί κανόνες:

Θα γράφουμε μία οδηγία μηχανής Turing ως μία «5άδα»-στοιχείο του $(\Sigma_K \times \Sigma) \times (\Sigma_K \times \Sigma \times \{-1, +1, 0\})$, και συγκεκριμμένα ως δύο τμήματα, ένα «αριστερό» και ένα «δεξιό»:

$$(K , \sigma) \rightarrow (K', \sigma', \delta) \quad \text{όπου } \delta = -1, 0 ,+1$$

Ως πρόγραμμα Turing π, θεωρούμε ένα σύνολο τέτοιων οδηγιών, δηλαδή:

$$\pi \subseteq (\Sigma_K \times \Sigma) \times (\Sigma_K \times \Sigma \times \{-1, +1, 0\})$$

όπου ταυτόχρονα διακρίνονται προς ειδική χρήση τρείς καταστάσεις:

- μια αρχική, $I_\pi \in \Sigma_K$, και...
- δύο τελικές, Y_π και N_π, (αντίστοιχες μιας «θετικής» (*Yes*) και μιας «αρνητικής» (*No*) κατάληξης του προγράμματος π.

Για τεχνικούς λόγους που θα φανούν αργότερα, θα απαιτούμε (συντακτικός κανόνας!) προς αποφυγή συγχύσεως τα εξής:

- το αρχικό σύμβολο I_π να είναι πράγματι «αρχικό», δηλαδή να μην εμφανίζεται στο δεξιό τμήμα (K′, –, –) καμμιάς οδηγίας του π, και..
- τα δύο τελικά σύμβολα Y_π και N_π, να είναι πράγματι «τελικά», δηλαδή να μην εμφανίζονται στο αριστερό (K, –) τμήμα καμμίας οδηγίας του π.

Αυτά θα είναι τα ***συντακτικά*** συστατικά στοιχεία του προγραμματικού συμβολισμού που θα εξετάσουμε για λίγο στη συνέχεια και εκτενέστερα στο Γ′ μέρος αυτών των σημειώσεων.

Σημασιολογικοί κανόνες:

Για να ορίσουμε τί κάνει ένα πρόγραμμα π «πρέπει & αρκεί» να εξηγήσουμε ποιά βήματα υπολογισμού *βήματα*(π), είναι επιτρεπτά (ή και επιβαλλόμενα) από το πρόγραμμα π. Η σχέση των *βημάτων*(-) ορίζεται επί δύο λέξεων φ και φ′ ως εξής:

- Τα *βήματα(π)* του υπολογισμού είναι όλα τα ζεύγη λέξεων (φ, φ′) που ορίζονται ως εξής:
  Εάν φ = α **τ K σ** β, (όπου α, β οποιεσδήποτε λέξεις), και η (K, σ) → (K′, σ′, δ) είναι οδηγία του π,
  τότε στο επόμενο στάδιο φ′ το σ τρέπεται σε σ′, το K σε K′, και το K′ μετακινείται κατά δ θέσεις:
  για δ = –1: φ′ = α K′ τ σ′ β,
  για δ = 0: φ′ = α τ K′ σ′ β,
  για δ = +1: φ′ = α τ σ′ K′ β,
  αλλιώς (αν λ.χ. το κατάσταση K είναι τελικό σύμβολο: $K \in \{ Y_\pi, N_\pi \}$, τότε φ′ = ∅.

Για ένα πρόγραμμα-Turing π, είναι λοιπόν δυνατόν, σύμφωνα με τα όσα έχουμε εξηγήσει να έχουμε υπολογισμούς $\upsilon = \langle \upsilon_0, \upsilon_1, \ldots, \upsilon_\kappa, \upsilon_{\kappa+1}, \ldots \rangle$ αρχίζοντας από μια λέξη-δεδομένο λ, σύμφωνα με την εξής σημασιολογία:

- *Αρχικό στάδιο υ_0:*
  Για κ = 0, $\upsilon_\kappa = I_\pi\ \lambda$, όπου I το αρχική παραγωγικό σύμβολο του προγράμματος π.
- *Βήμα υπολογισμού:*
  Για κάθε δύο διαδοχικά στάδια $(\upsilon_\kappa, \upsilon_{\kappa+1})$ πρέπει $(\upsilon_\kappa, \upsilon_{\kappa+1}) \in$ *βήματα*(π).

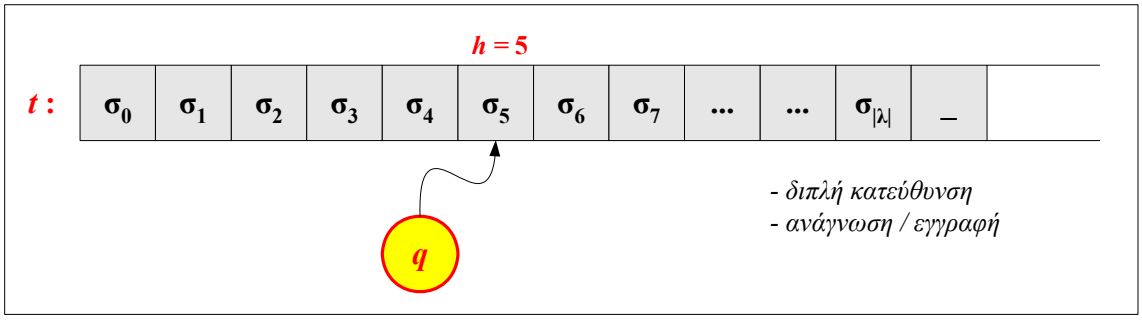
- *Τέλος υπολογισμού:*
  Όταν και μόνον $\upsilon_{\kappa+1} = \varnothing$.

Η μηχανική μορφή των «μηχανών-Turing».
Δώσαμε τον παραπάνω ορισμό κυρίως για να καταστεί σαφές ότι ο τρόπος αυτός υπολογισμού είναι «συμβολικός» ή «γραμματικο-συντακτικός». Είναι όμως πιο παραστατικό να δούμε τα παραπάνω προγράμματα ως προγράμματα μιας μηχανής, η οποία αποκαλείται ***μηχανή-Turing***.

Σύνταξη...
Σε μιά μηχανή Turing διακρίνουμε τα ίδια συντακτικά στοιχεία, με τον ίδιο ρόλο, όπως πρίν, μόνον που εδώ αποκαλούμε τα παραγωγικά σύμβολα (και) ***καταστάσεις***.

... και σημασία:
Για την νοηματοδότηση των προγραμμάτων κατά «μηχανικό» τρόπο, θεωρούμε τα εξής:
- την *ταινία* της μηχανής, t[0] t[1] t[2] ... t[h] ..., δηλ. μια ακολουθία από θέσεις ή κυψέλες, στις οποίες είναι καταχωρισμένα κάποια τερματικά σύμβολα, τα οποία από ένα σημείο και μετά είναι ίσα με το «_» που συμβατικά, θεωρούμε ως το σύμβολο του «διαστήματος» ή της «κενής» θέσης.
- την *κεφαλή* της μηχανής, δηλαδή έναν φυσικό αριθμό $h \in \mathbf{N}$, ο οποίος δηλώνει σε ποιά θέση της ταινίας ευρίσκεται η κεφαλή,
- και τέλος την εκάστοτε *κατάσταση* $q \in \Sigma_K$.

Θα αποκαλούμε μια τριάδα $\langle t, h, q\rangle$ ως την ***(καταστατική) περιγραφή*** της μηχανής. Θα σχεδιάζουμε μια τέτοια μηχανή όπως παρακάτω, σχεδιάζοντας την «ταινία» σαν μια σειρά από κυψέλες που περιέχουν το αντίστοιχο σύμβολο και είναι αριθμημένες από αριστερά προς τα δεξιά, και την «κεφαλή» σαν μια κυψέλη που δείχνει με ένα βέλος τη θέση της και η οποία περιέχει την «κατάσταση» του αυτόματου.



Σχήμα: Η «ταινία» t, μιας μηχανής-Turing. (+++)

Ορίζουμε έναν υπολογισμό της μηχανής-Turing ως μία ακολουθία καταστατικών περιγραφών στην οποία η κάθε επόμενη περιγραφή φ' προκύπτει από την προηγούμενη φ, σύμφωνα με μία κάποια οδηγία του προγράμματος π. Συγκεκριμμένα:
- Η σχέση *βήματα(π)* του υπολογισμού είναι όλα τα ζεύγη λέξεων (φ, φ') που ορίζονται ως εξής:
  Μια οδηγία $(K, \sigma) \to (K', \sigma', \delta)$ είναι *εφαρμόσιμη* επί της $\phi = \langle t, h, q\rangle$, εάν:
  - η κεφαλή «βλέπει» το σύμβολο μ, εάν δηλαδή: $t[h] = \sigma$, και,
  - η κατάσταση του αυτομάτου είναι η K: $q = K$,

  και εάν είναι εφαρμόσιμη, τότε η καταστατική περιγραφή φ', είναι η εξής:

  $$\phi' = \langle t', h', q'\rangle, \quad \text{όπου } t' = t,\ q' = K' \text{ και } h' = h+|\mu|.$$

  (δηλαδή: το περιεχόμενο της ταινίας δεν μεταβάλλεται, η νέα κατάσταση είναι η K', και η κεφαλή μετακινείται τόσες θέσεις όσα είναι τα σύμβολα της λέξης μ που «ανέγνωσε».)

Για μια μηχανή-Turing, σύμφωνα με τα όσα έχουμε εξηγήσει, έχουμε υπολογισμούς $\upsilon = \langle \upsilon_0, \upsilon_1, ..., \upsilon_\kappa, ...\rangle$ αρχίζοντας από μια λέξη-δεδομένο λ, σύμφωνα με την εξής σημασιολογία:

- *Αρχικό στάδιο* υ_0*:*
  Κάθε λέξη $\lambda = \sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3\ ..\ \sigma_\nu \in \Sigma^*$ μπορεί να «φορτωθεί» στην ταινία του αυτόματου ορίζοντας ως $t_\lambda[\kappa] = \sigma_\kappa$, για $\kappa = 1, ..., |\lambda|$. Οι υπόλοιπες θέσεις μένουν «κενές», περιέχουν δηλαδή το σύμβολο-διάστημα: «_». Η μηχανή αρχίζει με την αρχική καταστατική περιγραφή:
  $$\langle t = t_\lambda, h = 1, q = I_\pi \rangle$$
- *Βήμα υπολογισμού:*
  Για κάθε δύο διαδοχικές περιγραφές $(\upsilon_\kappa, \upsilon_{\kappa+1})$ πρέπει $(\upsilon_\kappa, \upsilon_{\kappa+1}) \in$ *βήματα*(π).
- *Τέλος υπολογισμού:*
  Όταν και μόνον η κατάσταση q είναι τελική: $q \in \{ Y_\pi, N_\pi \}$.

Η αντιστοιχία μια μηχανής Turing με τις γραμματικές a-la Turing είναι προφανής. Η «μηχανή» είναι απλώς ένας λίγο πιο παραστατικός τρόπος παρουσίασης της γραμματικής.

Τί μπορούμε να υπολογίσουμε με τέτοιες μηχανές; Ο Turing ισχυρίστηκε το 1936, (και πολλοί άλλοι τα επιβεβαίωσαν στη συνέχεια), ότι αυτές οι μηχανές *αρκούν για να υπολογίσουμε οτιδήποτε θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε με οποιοδήποτε άλλο τρόπο*. Αλλά ο δρόμος μέχρι εκεί είναι μακρύς...

5ο Ομαλές γραμματικές και Πεπερασμένα αυτόματα.

Θα αρχίσουμε την ανάλυση των θεμελιακών ιδιοτήτων αυτών των τρόπων υπολογισμού, από την 1η και απλούστερη περίπτωση τις «***ομαλές γλώσσες***». Μια «ομαλή γλώσσα» μπορεί να θεωρηθεί από 4 (τουλάχιστον) διαφορετικές οπτικές γωνίες.

1ο: Ομαλές γραμματικές – η παραγωγική μορφή.

Ορίζουμε ως ***ομαλή γραμματική*** [5] μία 4άδα, $G = \langle \Sigma, \Sigma_K, I, \Delta \rangle$ όπου:

- Σ Το «αλφάβητο»: ένα πεπερασμένο σύνολο ***συμβόλων***, τα ***τερματικά*** σύμβολα. (Θα τα γράφουμε συνήθως με πεζά γράμματα, λ.χ. α, β, γ.)
- Σ_K Τα ***παραγωγικά*** σύμβολα ή ***καταστάσεις***, ένα πεπερασμένο σύνολο συμβόλων. (Θα τα γράφουμε συνήθως με κεφαλαία γράμματα, λ.χ. Κ, Λ, Μ.)
- I Ένα επιλεγμένο ***αρχικό*** παραγωγικό σύμβολο $I \in \Sigma_K$.
- Δ Ένα σύνολο ***κανόνων***. Στην παραγωγική μορφή μιας ομαλής γραμματικής οι κανόνες έχουν την εξής μορφή:
  - είτε $K \to \varnothing$.
  - είτε $K \to \lambda K'$.

  όπου τα Κ, Κ′ είναι παραγωγικά σύμβολα, και το λ είναι μια λέξη από τερματικά σύμβολα: $\lambda \in \Sigma^*$.

Μια ομαλή γραμματική προσφέρει κανόνες «επαναγραφής» μιας λέξης $\upsilon_\kappa \to \upsilon_{\kappa+1}$: για ένα στάδιο $\upsilon_\kappa \in (\Sigma \cup \Sigma_K)^*$, και κατά τα όσα έχουμε αναφέρει στις προηγούμενες ενότητες ισχύει το εξής:

«εάν $\upsilon_\kappa = \mu$ **Κ** τότε ως επόμενο στάδιο μπορούμε να λάβουμε τη λέξη $\upsilon_{\kappa+1} = \mu$ **λ Κ′** »

Το ζεύγος «$\upsilon_\kappa \to \upsilon_{\kappa+1}$» θα το αναφέρουμε ως ***βήμα παραγωγής*** μιας λέξης. Ένας «υπολογισμός» είναι λοιπόν εδώ μια ακολουθία βημάτων:

$$\upsilon_0 \to \upsilon_1 \to \upsilon_2 \to \ldots \to \upsilon_{\nu-1} \to \upsilon_\nu$$

στην οποία καθε ζεύγος διαδοχικών σταδίων είναι ένα βήμα παραγωγής ως προς κάποιον από τους κανόνες της γραμματικής μας. Ειδικότερα μας ενδιαφέρουν οι εξής υπολογισμοί, που θα αποκαλούμε ***παραγωγές***:

- το πρώτο στάδιο υ_0 , είναι η λέξη Ι (το αρχικό παραγωγικό σύμβολο), και
- το τελευταίο στάδιο, υ_ν , αποτελείται μόνο από τερματικά σύμβολα $\lambda \in \Sigma^*$.

Θα συμβολίζουμε μια παραγωγή της λέξης λ από την γραμματική G με $\mathbf{I} \Rightarrow_G \boldsymbol{\lambda}$, (ή απλώς $I \Rightarrow \lambda$). Το σύνολο των λέξεων $\lambda \in \Sigma^*$ για τις οποίες υπάρχει μία τουλάχιστον παραγωγή, $I \Rightarrow \lambda$, θα το ονομάζουμε *η **γλώσσα** L(G) που ορίζεται από την γραμματική G.*

(Προσέξτε ότι έχουμε έναν ιδιότυπο υπολογισμό αφού,

- ουσιαστικά δεν έχουμε δεδομένα...
- ο υπολογισμός είναι «διακλαδωτικός» αφού είναι δυνατόν να έχουμε εναλλακτικές επιλογές αν λ.χ. $K \to \mu_1 K_1$ αλλά και $K \to \mu_2 K_2$.)

2ο: Αυτόματα και ομαλές γραμματικές: ένα παραστατικό διάγραμμα.

Στα όσα θα ακολουθήσουν θα μας φανεί πολύ χρήσιμη μια παραστατική περιγραφή των οδηγιών μιας ομαλής γραμματικής (στη παραγωγική της μορφή). Αυτή θα είναι το *διάγραμμα μεταβάσεων*, που ορίζεται και αποτελείται από τα εξής:

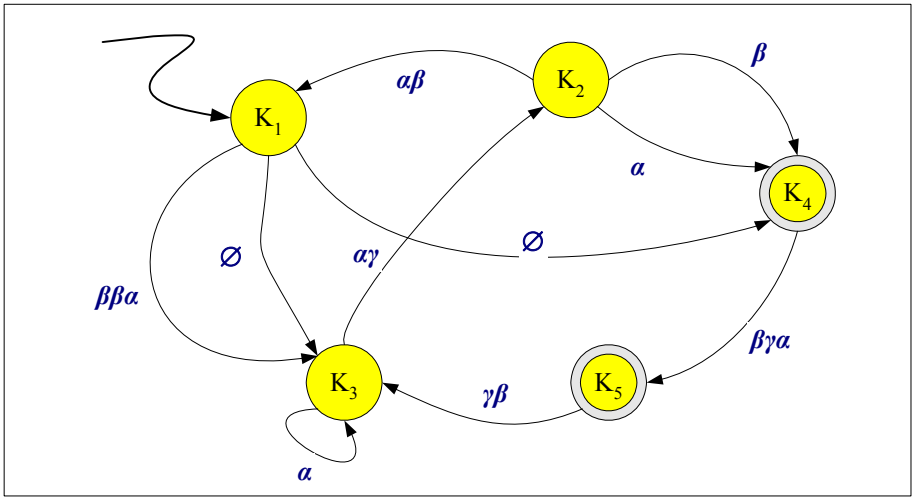
[5] «regular grammar»: συνηθίζεται και ο όρος «*κανονική γραμματική*», αν και η λέξη «*κανονικός*» μεταφράζει συνήθως την σημαντική μαθηματική έννοια του όρου *normal*, ενώ ο σχετικός αγγλικός όρος εδώ είναι *regular*.

- ένα πεπερασμένο σύνολο ***κόμβων***, καθένας των οποίων φέρει ως επιγραφή ένα σύμβολο «κατάστασης» επιλεγμένο από ένα σύνολο καταστάσεων Σ_K. Θα σχεδιάζουμε ένα κόμβο σαν ένα «μικρό» κύκλο που περιβάλλει το σύμβολο που περιέχει.
- ένα πεπερασμένο σύνολο κατευθυντών ***ακμών*** που φέρουν ως επιγραφή λέξεις $\mu \in \Sigma^*$ εξ ενός αλφαβήτου τερματικών συμβόλων Σ. Θα σχεδιάζουμε τις ακμές ως βέλη, με την επιγραφή τοποθετημένη πλησίον του μέσου της ακμής.
- ένα επιλεγμένο αφετηριακό κόμβο με επιγραφή $I \in \Sigma_K$. Θα διακρίνουμε τον αφετηριακό κόμβο σχεδιάζοντας ένα βέλος που καταλήγει σε αυτόν χωρίς να εκκινεί από κανέναν άλλο κόμβο.
- ένα επιλεγμένο σύνολο τερματικών κόμβων $T \subseteq \Sigma_K$. Θα σχεδιάζουμε τους τερματικούς κόμβους με κύκλους των οποίων η περιφέρεια έχει σχεδιαστεί με «διπλή» γραμμή. Θα αποκαλούμε στις καταστάσεις Τ ως *αποδεκτικές* καταστάσεις, και στις οι υπόλοιπες Σ_K–Τ ως *απορριπτικές*.

Σπεύδουμε εδώ να σχολιάσουμε την περίπου προφανή αντιστοιχία αυτών των διαγραμμάτων με τις ομαλές γραμματικές (στη παραγωγική μορφή τους):

Για κάθε ομαλή γραμματική $G = \langle \Sigma, \Sigma_K, I, \Delta \rangle$, σχεδιάζουμε το αντίστοιχο διάγραμμα D ως εξής:
- οι κόμβοι είναι όσοι τα παραγωγικά σύμβολα Σ_K, και επιγράφονται με αυτά.
- αφετηριακός κόμβος ορίζεται αυτό που επιγράφεται με το αρχικό σύμβολο I.
- για κάθε κανόνα $K \to \varnothing$, ο κόμβος K χαρακτηρίζεται ως τερματικός, και συλλέγεται στο σύνολο Τ.
- για κάθε κανόνα $K \to \lambda K'$, προσθέτουμε μια ακμή μετάβασης από τον κόμβο K στον κόμβο K', και θέτουμε ως επιγραφή της ακμής αυτής τη λέξη λ.

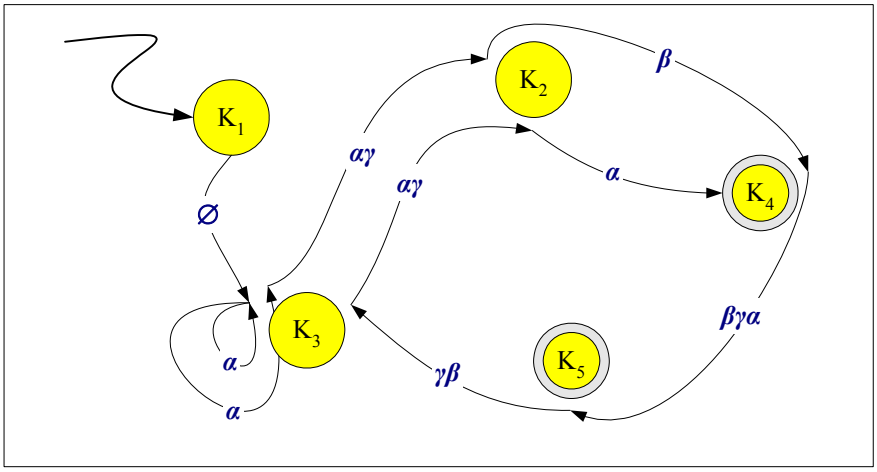
Συμμετρικά, για κάθε διάγραμμα μεταβάσεων D, ορίζεται μια ομαλή γραμματική: $G = \langle \Sigma, \Sigma_K, I, \Delta \rangle$ στη παραγωγική της μορφή:
- το αλφάβητο Σ περιέχει όσα σύμβολα εμφανίζονται στις επιγραφές των ακμών του D.
- τα παραγωγικά σύμβολα είναι οι επιγραφές των κόμβων.
- αρχικό σύμβολο η επιγραφή I του αφετηριακού κόμβου
- για κάθε τερματικό κόμβο, προσθέτουμε τον κανόνα $K \to \varnothing$, στους κανόνες Δ.
- για κάθε ακμή (K, K') με επιγραφή λ, προσθέτουμε τον κανόνα $K \to \lambda K'$ στους κανόνες Δ.



Σχήμα: Ένα διάγραμμα μεταβάσεων D.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα (οποιοδήποτε διάγραμμα μεταβάσεων D) για να ορίσουμε μια γλώσσα ως εξής: Θα ονομάζουμε ***περίπατο*** στο διάγραμμα μεταβάσεων κάθε ακολουθία διαδοχικών ακμών $w = \langle e_1, e_2, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n \rangle$ – δηλαδή ακμών καθεμία των οποίων καταλήγει στον κόμβο από τον οποίο εκκινεί η επόμενη. Ένας περίπατος θα είναι «αποδεκτικός» εάν (α) η αφετηρία του είναι ο αφετηριακός κόμβος, και (β) καταλήγει σε τερματικό κόμβο. Εάν διανύοντας ένα περίπατο w παραθέτουμε τις επιγραφές των ακμών του τότε σχηματίζουμε μια λέξη λ(w). Η γλώσσα που ορίζει το διάγραμμα D είναι το σύνολο των λέξεων που παράγονται από όλους και μόνον τους αποδεκτικούς περιπάτους:

L(D) = {λ(w): w αποδεκτικός περίπατος στο D}



Σχήμα: Ένας (αποδεκτικός) περίπατος **Ø α α αγ β βγα γβ αγ α**
στο διάγραμμα μεταβάσεων D , που παράγει τη λέξη **ααγββγαγβαγα**.

Είναι σχεδόν άμεσα προφανές ότι εάν η γραμματική G αντιστοιχεί στο διάγραμμα μεταβάσεων D, τότε οι αντίστοιχες γλώσσες που παράγονται είναι οι ίδιες: L(G) = L(D).

Τι είναι μια «γλώσσα»;

Μια ***γλώσσα*** δεν είναι παρά ένα σύνολο λέξεων – υποσύνολο όλων των δυνατών λέξεων ενός αλφαβήτου Σ. (Αν και ο όρος «γλώσσα» έχει επικρατήσει, ο όρος «***λεξιλόγιο***» αποδίδει ακριβέστερα το εννοούμενο.)
Κάθε λέξη μιας γλώσσας (ή ενός λεξιλογίου) δεν είναι παρά ο τρόπος που έχουμε διαλέξει για να *παραστήσουμε* ή *περιγράψουμε* ένα αντικείμενο που μας ενδιαφέρει. Αυτό που διακρίνει τις λέξεις μιας συγκεκριμμένης γλώσσας από τις υπόλοιπες είναι ότι τα αντικείμενα που περιγράφουν έχουν μια «κοινή ιδιότητα» – ενώ εκείνα των υπολοίπων δεν την έχουν. Επομένως μια μηχανή που αποδέχεται μιά γλώσσα μας επιτρέπει να αναγνωρίζουμε τα μέλη ενός συνόλου λέξεων, να «υπολογίζουμε» δηλαδή εάν ένα εκ των αντικειμένων που έχουμε περιγράψει, έχει ή δεν έχει μια «ιδιότητα».

3ο: Η «αναλυτική μορφή» μιας ομαλής γραμματικής.
Με την παραγωγική μορφή μιας ομαλής γραμματικής G μπορούμε να ορίζουμε μια γλώσσα L(G). Αλλά τί να κάνουμε έναν ορισμό εάν δεν μπορούμε να τον εφαρμόσουμε, εάν δηλαδή δεδομένης μιας λέξης λ ∈ Σ* δεν είμαστε σε θέση να εξακριβώσουμε εάν αυτή η λέξη εμπίπτει ή όχι, σε αυτόν τον (γραμματικό) ορισμό;

Χρειαζόμαστε λοιπόν και κάποιου είδους κανόνες για να *αναλύουμε* μια λέξη λ ως προς μια γραμματική G, προς διαπίστωση του εάν λ ∈ L(G). Η ανάλυση μιας λέξης ως προς την γραμματική G επιδιώκει την ανακάλυψη μιας παραγωγής I ⇒ λ. Το πώς μπορεί να γίνει αυτό δεν είναι προφανές εκ πρώτης όψεως· (ούτε εκ δευτέρας...). Αυτό όμως που είναι φανερό εξ αρχής είναι ότι εάν (με κάποιο τρόπο) μας δινόταν η σειρά των παραγωγικών κανόνων που εφαρμόστηκαν για την παραγωγή, τότε θα έπρεπε να είμαστε σε θέση, τουλάχιστον, να ***επιβεβαιώνουμε*** ότι αυτή η σειρά κανόνων «ταιριάζει» με την υπό ανάλυση λέξη. Π.χ. εάν ο 1ος κανόνας που εφαρμόστηκε ήταν I → α β K θα πρέπει να είμαστε σε θέση να επιβεβαιώνουμε ότι το δύο πρώτα σύμβολα της λ είναι τα α και β. Εμείς, ως άνθρωποι, θα το κάναμε αυτό τοποθετώντας τα α και β κάτω από την αρχή της λέξης λ (είτε γραπτά είναι νοητά), και συγκρίνοντας αυτά ένα-προς-ένα, (ιδίως εάν ήσαν πολλά και όχι μόνον 2) με τα αντίστοιχα της λ.

Οι γραμματικοί κανόνες όμως δεν έχουν αυτή την «δισδιάστατη» μορφή, αλλά μπορούμε να έχουμε το ισοδύναμο αποτέλεσμα, εάν τα τοποθετούσαμε αριστερά της λ, με αντίστροφη σειρά σχηματίζοντας την λέξη **Κ β α ⇒ λ**. Εάν η λέξη λ άρχιζε με το σύμβολο α, εάν είχε δηλαδή την μορφή α λ', (όπου λ' η υπόλοιπη λέξη μετά το α), τότε θα είχαμε την λέξη **Κ β α ⇒ α λ'**, και η διαπίστωση ότι η λ αρχίζει με 'α' λαμβάνει πια γραμματική μορφή, αφού εμφανίζεται η (υπο)λέξη **α ⇒ α** – που μαρτυρεί κατά προφανή τρόπο ότι «βρήκαμε ότι ζητούσαμε».

Για την αναλυτική μορφή, λοιπόν, μιας ομαλής γραμματικής G θα χειριζόμαστε λέξεις την μορφή ρ ⇒ λ (ώστε να συμβολίζουν υποτιθέμενες παραγωγές).

- Το αριστερό τμήμα – ρ ∈ (Σ∪Σκ)* – θα είναι ο κανόνας προς επιβεβαίωση ότι είναι εφαρμόσιμος.
- Το δεξιό τμήμα – λ ∈ Σ* θα είναι η λέξη προς ανάλυση (ή ότι υπόλοιπο έχει μείνει από αυτήν).

Αν το αριστερό τμήμα γράφεται ως ρ = ρ' σ, και το δεξιό ως λ = σ λ', για κάποιο σύμβολο σ, τότε το σύμβολο σ πράγματι «επιβεβαιώνεται», το «διαβάζουμε» από τα δεδομένα, και «προχωρούμε» στο επόμενο. Αυτό είναι εκφράσιμο με τον απλό γραμματικό κανόνα: **σ ⇒ σ → ⇒** (για κάθε σ ∈ Σ). Αν λοιπόν πρέπει να επιβεβαιώσουμε την λέξη φ = Κ ⇒ λ, και υπάρχει στην G κάποιος κανόνας Κ → σ Κ', αρκεί να επιβεβαιώσουμε την λέξη φ' = Κ' σ ⇒ λ.

Οι προηγούμενες παρατηρήσεις εξηγούν το γιατί η παρακάτω «αναλυτική» μορφή G' μιας ομαλής γραμματικής G είναι σε θέση να επιβεβαιώνει σωστά ότι μια λέξη λ παράγεται από G:

Σ' Τερματικά σύμβολα: τα ίδιο με της G, συν ένα διαχωριστικό σύμβολο ⇒.
Σ'κ Παραγωγικά σύμβολα: τα ίδια με εκείνα της G.
Ι' Το ίδιο το αρχικό σύμβολο της G.
Δ' Οι (νέοι) κανόνες:
- για κάθε κανόνα **Κ → ∅** της G,
  προσθέτουμε στο Δ' τον κανόνα: **Κ ⇒ → ⇒**
- για κάθε κανόνα **Κ → λ Κ'** της G, όπου λ = σ1 σ2 ... σν, (σκ ∈ Σ, κ = 1, ..., ν).
  προσθέτουμε στο Δ' τον κανόνα: **Κ ⇒ → Κ' σν ... σ2 σ1 ⇒**
- για κάθε τερματικό σύμβολο σ ∈ Σ,
  προσθέτουμε στο Δ' τον κανόνα «επιβεβαίωσης»: **σ ⇒ σ → ⇒**

Με αυτή την μορφή, μια «***συντακτική*** (ή *γραμματική* ή *λεκτική*) ***ανάλυση***» είναι μια ακολουθία βημάτων,

$$\upsilon_0 \rightarrow \upsilon_1 \rightarrow \upsilon_2 \rightarrow .... \rightarrow \upsilon_\nu$$

όπου:

- το πρώτο στάδιο υ0 , είναι η λέξη Ι ⇒ λ, δηλαδή το αρχικό σύμβολο και η προς ανάλυση λέξη λ.
- καθε ζεύγος διαδοχικών σταδίων είναι ένα βήμα ανάλυσης ως προς κάποιον από τους κανόνες της γραμματικής G'μας, και,
- το τελικό στάδιο υν, γράφεται ως μόνον το σύμβολο ⇒, (δηλαδή: *και στο δεξιό τμήμα η λέξη λ έχει αναγνωστεί πλήρως, και στο αριστερό τμήμα δεν έχει μείνει καμμία αναγνωριστική «εκκρεμότητα»*).

4ο: Μια «μηχανή» για μια ομαλή γραμματική.

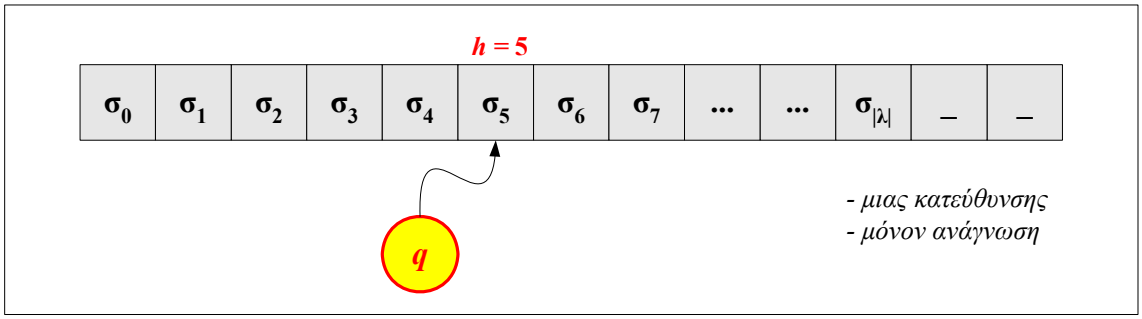
Και η αναλυτική μορφή των ομαλών γραμματικών επιδέχεται μια πιο παραστατική, και κυρίως μια πιο «μηχανική» περιγραφή, η οποία κατά κάποια έννοια είναι σε θέση να φέρει σε πέρας τους παραπάνω υπολογισμούς.

Θα ονομάζουμε (***πεπερασμένο***) ***αυτόματο*** μια 5άδα, Α = ⟨Σ, Σκ, Ι, Τ, Δ⟩ όπου :

- το Σ είναι ένα οποιοδήποτε αλφάβητο.
- το Σκ είναι κάποιο αλφάβητο, με σύμβολα που θα τα αποκαλούμε ***καταστάσεις***,
- το Ι ∈ Σκ είναι μια διακεκριμμένη κατάσταση που θα αποκαλούμε ***αρχική***,
- το Τ ⊆ Σκ, ένα (υπο)σύνολο διακεκριμμένων καταστάσεων, οι ***αποδεκτικές*** *ή τελικές*, και
- οι κανόνες Δ είναι ένα σύνολο ***οδηγιών*** 3άδων της μορφής: ⟨Κ, λ, Κ'⟩, όπου:
  - τα Κ και Κ' είναι καταστάσεις, Κ, Κ' ∈ Σκ, και,
  - το λ είναι μια λέξη από τερματικά σύμβολα, λ ∈ Σ*.

Σε κάθε αυτόματο επισυνάπτουμε την «μηχανική» του όψη, και συγκεκριμμένα τα εξής:

- μια μεταβλητή κατάσταση q , q ∈ Σ_K.
- μια μεταβλητή h, (έναν φυσικό αριθμό h ∈ N) , ως την θέση μιας «κεφαλής».
- μια απεικόνιση, t : **N** → Σ ∪ { _ }, ως μια «ταινία» από κυψέλες με ένα τερματικό σύμβολο σε κάθε κυψέλη. (Θα σημειώνουμε μια «κενή» κυψέλη με το σύμβολο «κάτω παύλα» '_' .)



Σχήμα: Η εικόνα ενός (πεπερασμένου) αυτομάτου ως «μηχανής».

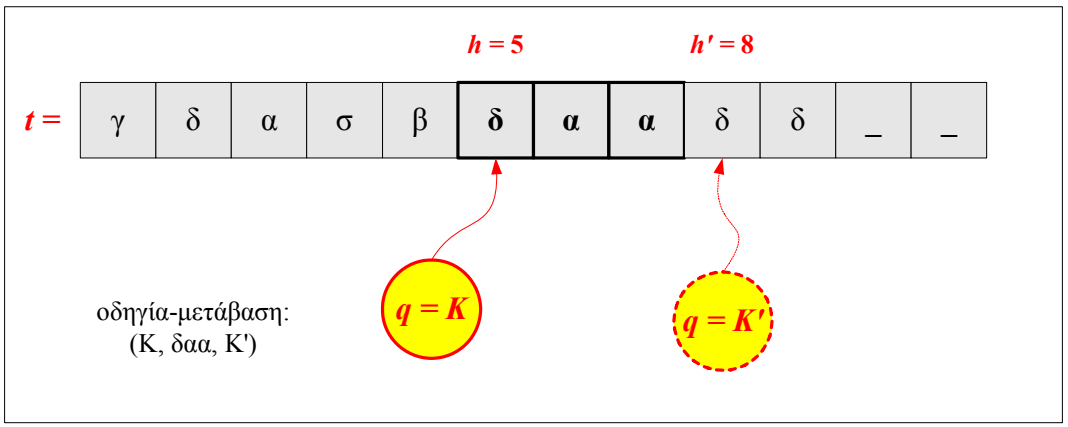
Ο σκοπός μας είναι η η ταινία να φέρει επ' αυτής την υπό ανάλυση λέξη λ, η κεφαλή h να παίζει τον ρόλο του συμβόλου '⇒' προσδιορίζοντας την υπόλοιπη προς ανάλυση λέξη, και η κατάσταση q να αναπαριστά τον προς εφαρμογή αναλυτικό κανόνα. Ορίζουμε λοιπόν – κατά το γενικό πλαίσιο που δώσαμε στην εισαγωγή

- Η σχέση *βήματα(π)* της ανάλυσης είναι όλα τα ζεύγη λέξεων (φ, φ') που ορίζονται ως εξής:
  Μια οδηγία ⟨K, λ, K'⟩ είναι *εφαρμόσιμη* επί της περιγραφής φ = ⟨t, h, q⟩, εάν:
  - η κεφαλή και για |λ| σύμβολα προς τα δεξιά «βλέπει» την λέξη λ.
  - η κατάσταση του αυτομάτου είναι η K: q = K,

  και εάν είναι εφαρμόσιμη, τότε η καταστατική περιγραφή φ', είναι η εξής:

  $$\phi' = \langle t', h', q' \rangle, \quad \text{όπου } t' = t,\ q' = K' \text{ και } h' = h+|\lambda|.$$

  (δηλαδή: το περιεχόμενο της ταινίας δεν μεταβάλλεται, η νέα κατάσταση είναι η K', και η κεφαλή μετακινείται τόσες θέσεις όσα είναι τα σύμβολα της λέξης λ που έχει πια «διαβάσει».)



Σχήμα: Η οδηγία **⟨ K, δαα, K'⟩** είναι εφαρμόσιμη, και επιφέρει τις εικονιζόμενες μεταβολές.

Για ένα τέτοιο αυτόματο, σύμφωνα με όσα έχουμε εξηγήσει, έχουμε υπολογισμούς υ = ⟨υ_0, υ_1, ..., υ_κ, ...⟩ αρχίζοντας από μια λέξη-δεδομένο λ, σύμφωνα με την εξής σημασιολογία:

- *Αρχικό στάδιο υ_0:*
  Κάθε λέξη λ = σ_1 σ_2 σ_3 .. σ_ν ∈ Σ* μπορεί να «φορτωθεί» στην ταινία του αυτόματου ορίζοντας ως $t_\lambda[\kappa] = \sigma_\kappa$, για κ = 1, ..., |λ|, (και κενές τις υπόλοιπες θέσεις). Η μηχανή αρχίζει με την αρχική καταστατική περιγραφή:
  $$\langle t = t_\lambda,\ h = 1,\ q = I_\pi \rangle$$
- *Βήμα υπολογισμού:*

Για κάθε δύο διαδοχικές περιγραφές $(υ_κ, υ_{κ+1})$ πρέπει $(υ_κ, υ_{κ+1}) ∈ βήματα(π)$.

- *Τέλος υπολογισμού:*
  Όταν και μόνον η κεφαλή έχει διαβάσει όλη την ταινία: $h = |λ|+1$.

Το αποτέλεσμα του υπολογισμού δίδεται από την τελική κατάσταση q, της μηχανής. Εάν αυτή είναι αποδεκτική, δηλ. $q ∈ T$, τότε λέμε ότι το αυτόματο ***αποδέχθηκε την είσοδό του***, (την λέξη-δεδομένο λ), αλλοιώς θα λέμε ότι την *απέρριψε*. Κάθε αυτόματο αποδέχεται, λοιπόν, μια γλώσσα $L(A) ⊆ Σ^*$ η οποία αποτελείται όλες και μόνον τις λέξεις του αλφαβήτου Σ , τις οποίες αυτό αποδέχεται.

Είναι φανερό από τα προηγούμενα ότι μια «ομαλή γλώσσα» έχει τέσσερεις (τουλάχιστον) ισοδύναμους τρόπους να παρασταθεί: ως μια παραγωγική γραμματική ή διάγραμμα μεταβάσεων, και ως μια «αναλυτική» γραμματική ή πεπερασμένο αυτόματο. Λεπτομερέστερη «απόδειξη» περιττεύει: αυτή απλώς θα επαναλάμβανε πληκτικά τους παραπάνω ορισμούς.

Παράδειγμα: ένα αυτόματο που αναγνωρίζει ποιοι δυαδικοί αριθμοί διαιρούνται δια 3.
Έστω $Σ_2 = \{0,1\}$ το δυαδικό αλφάβητο. Το $Σ_2^*$ μπορεί να ερμηνευθεί ως όλοι οι δυαδικοί αριθμοί. Εξ αυτών κάποιοι είναι πολλαπλάσια του 3. Έστω:

$$L_{3_×} = \{ λ: λ ∈ Σ_2^*, λ \text{ – ερμηνευμένη ως δυαδικός αριθμός – είναι πολλαπλάσιο του 3 } \}$$

Είναι η $L_{3_×}$ ομαλή γλώσσα; Γίνεται αποδεκτή από κάποιο πεπερασμένο αυτόματο; Ας υποθέσουμε ότι $λ = b_1\, b_2 \ldots b_ν\, b_{ν+1} \ldots$, ότι έχουμε διαβάσει το αρχικό τμήμα της $λ_{[1..ν]}$ έως και το ν-οστό ψηφίο· και ότι «θυμόμαστε» (ποιός; πώς;) το υπόλοιπο $r_ν$ της διαίρεσης δια 3 του αριθμού $λ_{[1..ν]}$, (δηλαδή $λ_{[1..ν]} = (3k_ν + r_ν)$). Εάν διαβάσουμε και λάβουμε υπόψι μας και το επόμενο δυαδικό ψηφίο $b_{ν+1}$, ποιό θα είναι το νέο υπόλοιπο, αυτό δηλαδή του αριθμού $λ_{[1..ν+1]}$; Προσέξτε ότι για τους αριθμούς $λ_{[1..ν]}$ και $λ_{[1..ν+1]}$ (δηλαδή τα αρχικά τμήματα της λέξης λ από 1 έως ν σύμβολο, και από 1 έως (ν+1), ερμηνευμένα ως δυαδικούς) ισχύει :

$$λ_{[1..ν+1]} = 2\, λ_{[1..ν]} + b_{ν+1} = 2\, (3k_ν + r_ν) + b_{ν+1}$$

και ότι επομένως:

$$λ_{[1..ν+1]} \bmod 3 = r_{ν+1} = (2\, r_ν + b_{ν+1}) \bmod 3$$

Το επόμενο υπόλοιπο, δηλαδή, είναι κάτι που είμαστε σε θέση να το υπολογίσουμε,

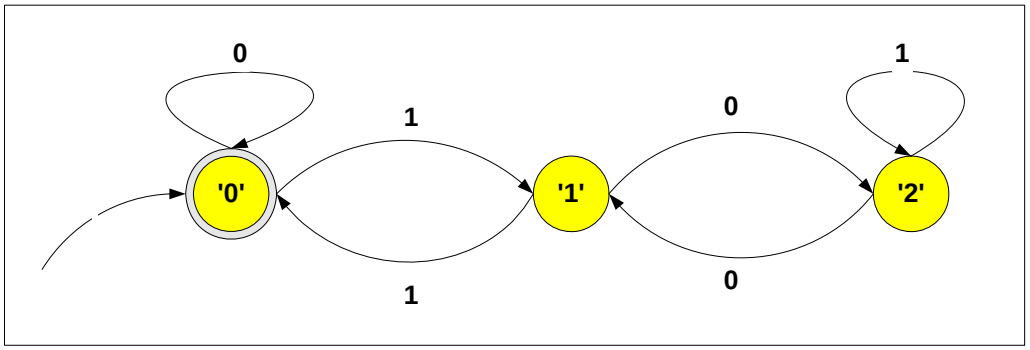
- από το προηγούμενο υπόλοιπο, και,
- το επόμενο σύμβολο-ψηφίο που διαβάζουμε.

Αρκεί επομένως να θυμόμαστε *–με την κατάσταση του αυτομάτου μας–* το εκάστοτε προηγούμενο υπόλοιπο $r_ν$! Ο παρακάτω πίνακας δίνει όλους τους 3×2 συνδυασμούς,

$r_{ν+1} = (2\, r_ν + b_{ν+1}) \bmod 3$:

	$b_{ν+1} = 0$	$b_{ν+1} = 1$
$r_ν = 0$	$r_{ν+1} = 0$	$r_{ν+1} = 1$
$r_ν = 1$	$r_{ν+1} = 2$	$r_{ν+1} = 0$
$r_ν = 2$	$r_{ν+1} = 1$	$r_{ν+1} = 2$

και ακολουθεί το αυτόματο εκπεφρασμένο ως διάγραμμα μεταβάσεων:



Σχήμα: Το διάγραμμα μεταβάσεων, για τις δυαδικές παραστάσεις των πολλαπλασίων του 3.

■

6ο Πεπερασμένα αυτόματα: το «*θεώρημα ισοδυναμίας*» αιτιοκρατικών και μή.

Αιτιοκρατικές συσκευές: η υλοποιήσιμη εκδοχή μιας υπολογιστικής συσκευής.

Η παραγωγή και της ανάλυσης μιας λέξης ως προς μια ομαλή γραμματική μοιάζουν συμμετρικές διαδικασίες – αλλά αυτό είναι οπτική απάτη. Κατά την παραγωγή μιας λέξη έχουμε μια ελευθερία επιλογής κανόνων: λ.χ. σε κάποια φάση της παραγωγής ίσως να υπάρχουν δύο (τουλάχιστον) εφαρμόσιμοι κανόνες: $K \to \lambda_1 K_1$, και $K \to \lambda_2 K_2$. Ίσως μάλιστα να υπάρχουν και δύο κανόνες της μορφής $K \to \lambda K_1$, και $K \to \lambda K_2$, (δηλαδή $\lambda_1 = \lambda_2$). Ίσως μάλιστα να υπάρχει και κανόνας της μορφής: και $K \to K'$, (δηλαδή $\lambda = \varnothing$). Αυτό είναι επιθυμητό, διότι αυξάνει την εκφραστικότητα των κανόνων μας.

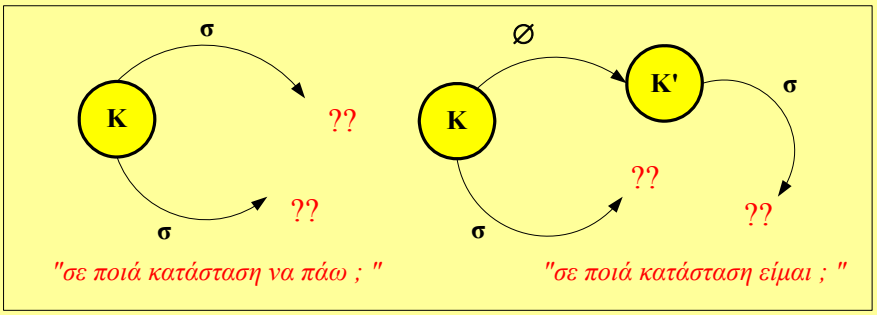
Κατά την παραγωγή μιας λέξης «πρέπει» λοιπόν να έχουμε πολλαπλές επιλογές, αλλά κατά την ανάλυση μιας λέξης, αυτό ακριβώς πρέπει να *μην έχουμε*. Ένα αυτόματο, εάν εγνώριζε τον εκάστοτε εφαρμοστέο κανόνα, θα μπορούσε να επιβεβαιώσει με «γραμματικό τρόπο», ότι αυτός πράγματι είναι εφαρμόσιμος· θα μπορούσε όμως *και να εντοπίσει* ποιός (αναλυτικός) κανόνας είναι ο εφαρμοστέος;

Εάν αναλύοντας την λέξη λ, το αυτόματο βρεθεί προ διλήμματος της μορφής: να εφαρμόσουμε τον $K\,\sigma_1 \to K_1$, ή τον $K\,\sigma_2 \to K_2$, τότε αρκεί να εξετάσει το 1ο σύμβολο, έστω σ, της λέξης λ, να ελέγξει εάν $\sigma = \sigma_1$ ή $\sigma = \sigma_2$, ή ότι άλλο, και να πράξει αντιστοίχως. Εάν όμως ερχόταν η στιγμή να αντιμετωπίσει πολλαπλές επιλογές (όπως «είτε $K\,\sigma \to K'$, είτε $K\,\sigma \to K''$») τότε θα περιέπιπτε σε α-μηχανία· και αυτό, σχεδόν κυριολεκτικά: πως θα αποφάσιζε σε μια τέτοια περίπτωση μια ***μηχανή***;

Ας προσέξουμε εδώ, ότι ακόμα και η φαινομενικά αθώα οδηγία $K \to K'$ είναι ενδεχομένως μια συγκεκαλυμμένη πολλαπλή επιλογή καθώς εάν,

$$K \to K', \quad K\,\sigma \to K_1 \quad \text{και} \quad K'\,\sigma \to K_2$$

τότε ισοδύναμα $K\,\sigma \to K_1$ και $K\,\sigma \to K_2$. Στη προηγούμενη περίπτωση «δεν ξέρουμε πού να πάμε», και στην τελευταία περίπτωση «δεν γνωρίζουμε πού βρισκόμαστε»...



Σχήμα: Διλήμματα στην «μηχανική» εκτέλεση οδηγιών.

Αυτή η ευελιξία είναι *πλεονέκτημα* από πλευράς (μαθηματικού) ορισμού, διότι διευκολύνει τον ορισμό ενός συνόλου από λέξεις μέσω μιας πιο εκφραστικής τεχνικής· (το είδαμε αυτό σε προηγούμενο παράδειγμα). Αποτελεί όμως μειονέκτημα από πλευράς «μηχανικού» υπολογισμού διότι μας φέρνει ενώπιον του διλήμματος:

«όταν βλέπω το σύμβολο σ, και έχω τις οδηγίες $K\,\sigma \to K'$, αλλά και $K\,\sigma \to K''$,
πώς συνεχίζω; στη κατάσταση K' ή στην K'' ;»

Αυτή η διελκυστίνδα ορισμού-υπολογισμού (εκφραστικότεροι ή συνοπτικότεροι ορισμοί απαιτούν δυσκολότερους υπολογισμούς για την διαπίστωσή τους) είναι

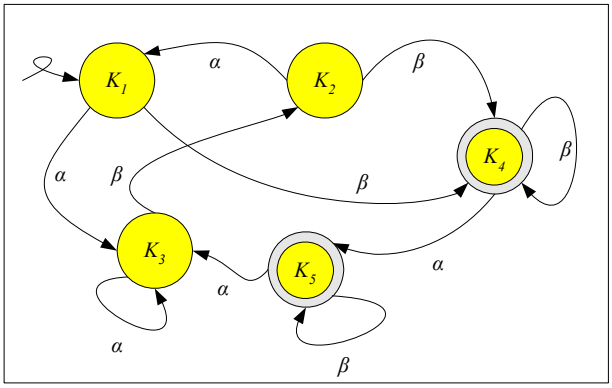
κεντρικό ζήτημα στην θεωρία υπολογισμού. Εμείς γνωρίζουμε ότι ενώπιον παρομοίων διλημμάτων είναι δυνατόν να εξετάσουμε όλες τις πιθανές επιλογές – αλλά «*εμείς*», (οι σχεδιαστές, οι προγραμματιστές, οι μαθηματικοί, ή όποιος άλλος), όχι όμως κατ' ανάγκην και ο συγκεκριμμένος ***τύπος μηχανής*** που αναλύουμε. Θα θεωρήσουμε λοιπόν μια ρεαλιστικά απλοποιημένη παραλλαγή των κανόνων γραμματικής ανάλυσης ώστε να αντιστοιχούν σε μια φυσικώς-τεχνολογικώς υλοποιήσιμη υπολογιστική συσκευή.

«Αιτιοκρατική» παραλλαγή ενός αυτομάτου.
Εάν...

- οι οδηγίες ενός αυτομάτου Δ, (δηλαδή μια ***σχέση*** $\Delta \subseteq \Sigma_K \times \Sigma^* \times \Sigma_K$), είναι ***συνάρτηση***, της μορφής $\Sigma_K \times \Sigma \to \Sigma_K$, αν δηλαδή για κάθε κατάσταση K και κάθε σύμβολο σ έχουμε έναν, και ακριβώς έναν, κανόνα $K\ \sigma \to K'$, και,
- υπάρχει μία ακριβώς αρχική κατάσταση (όπως συνήθως επιτρέπει ο ορισμός των αυτομάτων),

(δηλαδή, αν δεν έχουμε κανόνες της μορφής $K \to K'$, και η επόμενη κατάσταση $K' = \Delta(K, \sigma)$ ορίζεται πάντοτε και μονότιμα,).

τότε η μηχανή μας δεν περιέρχεται σε αμηχανία (sic), αλλά σε κάποια μοναδικά ορισμένη επόμενη κατάσταση. Σε αυτές τις περιπτώσεις θα λέμε ότι το αυτόματο είναι ***αιτιοκρατικό***, (και η αντίστοιχη γραμματική σε αιτοκρατική μορφή). Είναι προφανές ότι ένα αιτιοκρατικό αυτόματο έχει *τα χαρακτηριστικά μιας φυσικής και υλοποιήσιμης συσκευής* που έχει μηχανική συμπεριφορά – ενώ το μη αιτιοκρατικό δεν έχει τέτοια χαρακτηριστικά.



Σχήμα: Ένα αιτιοκρατικό αυτόματο, επί του αλφαβήτου $\Sigma = \{ \alpha, \beta \}$.

Θεώρημα: ισοδυναμία αιτιοκρατικών & μή-αιτιοκρατικών αυτομάτων
Ισχυρισμός: Για οποιοδήποτε μη-αιτιοκρατικό αυτόματο A, με ν καταστάσεις, *υπάρχει* (και *ορίζεται*, και *κατασκευάζεται*) ένα *αιτιοκρατικό* αυτόματο A', με $\leq 2^\nu$ καταστάσεις, το οποίο αποδέχεται την ίδια ακριβώς *γλώσσα*, δηλαδή: L(A) = L(A').

Σχέδιο απόδειξης: Υπάρχουν τέσσερεις λόγοι για τους οποίους μπορεί ένα αυτόματο να μην είναι αιτιοκρατικό:

- υπάρχουν μεταβάσεις οφειλόμενες σε μια λέξη $\lambda \in \Sigma^*$ και όχι σε ακριβώς ένα σύμβολο $\sigma \in \Sigma$.
- υπάρχουν ζεύγη κατάσταση/σύμβολο χωρίς καμμία επόμενη κατάσταση ως προς αυτά.
- υπάρχουν κενές μεταβάσεις.
- υπάρχουν ζεύγη κατάσταση/σύμβολο με περισσότερες από μία επόμενες καταστάσεις.

Τα τρία πρώτα προβλήματα είναι δυνατόν να αντιμετωπιστούν σχετικά εύκολα.

- 1ο βήμα: Αν έχουμε κάποιο κανόνα $K \to \lambda\ K'$, όπου το λ είναι μια λέξη $\lambda = \sigma_1\ \sigma_2\ \ldots\ \sigma_\nu$, τότε αντικαθιστούμε αυτόν τον κανόνα με την σειρά των κανόνων: $K \to \sigma_1\ B_1$, $K \to \sigma_2\ B_2$, ..., $K \to \sigma_\nu\ K'$, όπου τα B_i, i = 1, 2, ..., ν–1 είναι *πρόσθετες* βοηθητικές (μη-αποδεκτικές...) καταστάσεις. Δεν είναι

δύσκολο να βεβαιώσει κάποιος ότι με μια τέτοια αλλαγή ούτε χάνουμε ούτε κερδίζουμε τίποτα – συνεχίζουμε να αποδεχόμαστε ακριβώς την ίδια γλώσσα όπως και πριν.

- 2ο βήμα: Έχοντας – μετά το 1ο βήμα – το πολύ ένα σύμβολο σε κάθε μετάβαση, παραμένει το ενδεχόμενο για κάποια κατάσταση $K \in \Sigma_K$, και σύμβολο $\sigma \in \Sigma$, να μην ορίζεται καμμία μετάβαση $(K, \sigma, K') \in \Delta$. Για αυτές τις περιπτώσεις χρησιμοποιούμε μία νέα βοηθητική κατάσταση B_{OXI} (*απορριπτική* φυσικά, δηλαδή εκτός του συνόλου Τ των αποδεκτικών καταστάσεων), στην οποία οδηγούμαστε και «παγιδευόμαστε», από κάθε κατάσταση Κ και σύμβολο σ για τα οποία δεν ορίζεται μετάβαση, κατά τον εξής τρόπο:
  - εάν δεν ορίζεται επόμενη κατάσταση για Κ και σ, τότε ορίζουμε $\Delta(K, \sigma) = B_{OXI}$.
  - για κάθε $\sigma \in \Sigma$ ορίζουμε $B_{OXI}\ \sigma \rightarrow B_{OXI}$.

  Αυτή η νέα βοηθητική κατάσταση δεν εμποδίζει την αποδοχή μιας λέξης που ήταν ήδη αποδεκτή, αλλά ούτε προκαλεί την αποδοχή κάποιων άλλων νέων λέξεων – επομένως συνεχίζουμε να αποδεχόμαστε ακριβώς την ίδια γλώσσα όπως και πριν.

- 3ο βήμα: Οι «κενές» μεταβάσεις (μέσω δηλαδή της κενής λέξης) είναι δυνατόν επίσης να απαλειφούν, μία προς μία – αν και η απαλειφή αυτή απαιτεί λίγο πιο περίτεχνους χειρισμούς από ότι προηγουμένως.
  - Κατά πρώτο πρέπει να προσέξουμε ότι ίσως να υπάρχουν *διαδοχικές* κενές μεταβάσεις, λ.χ. $K \xrightarrow{\varnothing} K' \xrightarrow{\varnothing} K''$. Για κάθε τέτοιο ζεύγος μεταβάσεων προσθέτουμε την κενή μετάβαση $K \xrightarrow{\varnothing} K''$. Έτσι ούτε προσθέτουμε ούτε αφαιρούμε αποδεκτές λέξεις, και επί πλέον μπορούμε να ενδιαφερόμαστε μόνον για όσες λέξεις παράγονται χρησιμοποιώντας *διαδοχικά μία* μόνον κενή μετάβαση, (αν και ίσως χρησιμοποιούν πολλές τέτοιες, όχι όμως διαδοχικά).
  - Στη συνέχεια, για κάθε «κενή» μετάβαση, $K \xrightarrow{\varnothing} K'$, εξετάζουμε το πώς μπορεί να φθάσει το αυτόματο στη πρώτη κατάσταση Κ, μέσω μιας μη-κενής μετάβασης, έστω $X \xrightarrow{\sigma} K$. Αν προσθέσουμε τις νέες μεταβάσεις $X \xrightarrow{\sigma} K'$ για κάθε σχετική κατάσταση Χ, και αφαιρέσουμε την παλαιά (πλέον) κενή μετάβαση $K \xrightarrow{\varnothing} K'$, τότε δεν αφαιρούμε ούτε προσθέτουμε καμμιά νέα αποδεκτή λέξη, διότι...
    - αν μια αποδεκτή λέξη λ χρησιμοποιεί την νέα μετάβαση, τότε αυτή η λ γινόταν και πριν αποδεκτή μέσω της παλαιάς κενής μετάβασης.
    - αν μια αποδεκτή λέξη χρησιμοποιούσε την παλαιά μετάβαση τότε στο προηγούμενο βήμα πρέπει να ακολουθούσε μια *μή-κενή* μετάβαση τύπου $X \xrightarrow{\sigma} K$, και επομένως γίνεται και τώρα αποδεκτή μέσω της νέας μη-κενής μετάβασης, $X \xrightarrow{\sigma} K'$.

    Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να εξαλείψουμε όλες τις κενές μεταβάσεις μία-μία, τόσο τις αρχικές όσο και όσες «μεταβατικές» προσθέσαμε στη συνέχεια, χωρίς να αλλοιώσουμε το σύνολο των αποδεκτών λέξεων. Εκτός...
  - ...εάν υπάρχουν κενές μεταβάσεις από την αρχική κατάσταση Ι: $I \xrightarrow{\varnothing} I'$ (...). Τότε από την Ι μπορούμε με κενή μετάβαση να μεταβούμε σε ένα σύνολο καταστάσεων, έστω ∅(Ι), κάθε μία των οποίων μπορεί να λειτουργήσει ως αρχική μετάβαση – αφού μπορούμε, στην αρχή, να μεταβούμε σε αυτή χωρίς την ανάγνωση κανενός συμβόλου. Αρκεί λοιπόν να τις θεωρήσουμε όλες αυτές σαν αρχικές καταστάσεις, και να αναζητήσουμε ένα αιτιοκρατικό αυτόματο που θα αποδέχεται όσες λέξεις παράγονται στο αυτόματο που καταλήξαμε στο 3ο βήμα, (το οποίο και θα συμβολίζουμε με $\mathbf{A}^+$), αρχίζοντας από μια οποιαδήποτε αρχική κατάσταση και καταλήγοντας σε οποιαδήποτε αποδεκτική κατάσταση.

- 4ο βήμα: Η κυρίως προσπάθειά μας εστιάζεται πλέον στο να αντιμετωπίσουμε το τελευταίο από τα προαναφερθέντα 4 ζητήματα: στο διάγραμμα ενός μη αιτιοκρατικού αυτομάτου, Α, ίσως υπάρχουν μεταβάσεις, (έστω μη-κενές και έστω προκαλούμενες από ένα ακριβώς σύμβολο), οι οποίες δεν οδηγούν σε μία μόνο κατάσταση αλλά σε περισσότερες από μία καταστάσεις. Αυτό το γεγονός (όπως και η τελευταία παρατήρηση της προηγουμένης παραγράφου) μας αναγκάζει να θεωρήσουμε ως καταστάσεις του νέου ισοδύναμου αυτόματου, Α', ως *σύνολα καταστάσεων του παλαιού*. Από ένα σύνολο καταστάσεων του Α μέσω ενός σύμβολου σ μπορούμε να μεταβούμε σε

ένα άλλο σύνολο καταστάσεων (πιθανά κενό!), και επομένως παρόμοιες πρέπει να είναι οι μεταβάσεις μας στο Α', εάν θέλουμε αυτό να εξομοιώσει το Α. Όλες οι προηγούμενες παρατηρήσεις λαμβάνονται υπ' όψι στους εξής ορισμούς/χειρισμούς:

	Ισοδύναμο Α'	
Σ'	αλφάβητο	το αλφάβητο Σ το αρχικού (μη-αιτιοκρατικού) αυτομάτου A^+.
$Σ'_K$	καταστάσεις	όλα τα υποσύνολα καταστάσεων του A^+: $\{ S : S \subseteq Σ_K \}$.
I'	αρχική κατάσταση	το υποσύνολο ∅(I).
T'	αποδεκτικές καταστάσεις	όσα $S \subseteq Σ_K$ περιέχουν έστω μια τελική κατάσταση του A^+.
Δ'	οδηγίες	$Δ'(S, σ) = \{ K' : \text{για όλες τις } K \xrightarrow{\sigma} K' \in Δ \text{ του } A^+ \}$

Παρατηρείστε ότι...

- Για κάθε κατάσταση του εξομοιωτικού αυτομάτου Α', $S \subseteq Σ_K$, και για κάθε σύμβολο $σ \in Σ$, ορίζουμε μία και ακριβώς μία νέα κατάσταση $S' = Δ'(S, σ)$ ως εξής: ελέγχουμε κάθε μετάβαση $K \xrightarrow{\sigma} K'$ που υπάρχει στις αρχικές οδηγίες, και για κάθε τέτοια μετάβαση προσθέτουμε την κατάσταση K' στο σύνολο καταστάσεων S', (ως ενδεχόμενη κατάσταση στην οποία θα έφθανε το αρχικό αυτόματο A^+).
- Το παραπάνω αυτόματο, Α', είναι αιτιοκρατικό, διότι...
  - για κάθε κατάστασή του, (σύνολο $S \subseteq Σ_K$), και κάθε σύμβολο $σ \in Σ$, ορίζεται ακριβώς μία επόμενη κατάσταση-σύνολο $S' = Δ'(S, σ)$.
  - υπάρχει μία ακριβώς αρχική κατάσταση, το σύνολο $∅(I) \subseteq Σ_K$.
- Θεωρούμε ένα σύνολο καταστάσεων $S \subseteq Σ_K$ ως αποδεκτική κατάσταση εάν και μόνον περιέχει ***έστω μία*** αποδεκτική κατάσταση του αρχικού αυτομάτου A^+.
- Το κενό σύνολο ∅, λειτουργεί ως κατάσταση «οριστικής αποτυχίας»: ακόμα και εάν για κάποια κατάσταση S και κάποιο σύμβολο σ, δεν υπάρχει καμμία μετάβαση $K \xrightarrow{\sigma} K'$ για κανένα $K \in S$, τότε $Δ'(S, σ) = ∅$. Γι' αυτήν την «κατάσταση» και για κάθε σύμβολο σ ισχύει $Δ'(∅, σ) = ∅$, (αυτομάτως...) Επομένως το 2ο βήμα επεξεργασίας της παραπάνω απόδειξης, είναι, τελικά, περιττό.

Είναι τελικά το Α' ισοδύναμο με το A^+ (δηλαδή και με το Α); Αποδέχεται δηλαδή ακριβώς την ίδια γλώσσσα; Από τα προηγούμενα σχόλια, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε λέξη του αυτομάτου A^+ στο οποίο καταλήξαμε στο 3ο βήμα επεξεργασίας, (βλ. παραπάνω), η οποία αρχίζει από μια οποιαδήποτε αρχική του κατάσταση και καταλήγει σε μια αποδεκτική κατάσταση, γίνεται δεκτή στο εξομοιωτικό αυτόματο Α' – και μόνον αυτές.

- Έστω ότι $λ = σ_1 ... σ_v$ μια τέτοια λέξη, η οποία γίνεται αποδεκτή ως ο περίπατος:

$$K_0 \xrightarrow{\sigma_1} K_1 \xrightarrow{\sigma_2} K_2 \ \ldots \xrightarrow{\sigma_v} K_v$$

όπου, λόγω της επεξεργασίας που έχουμε κάνει, τα $σ_i$ είναι *ένα* σύμβολο, και ποτέ η κενή λέξη ∅. Η κατάσταση K_0 είναι μία από τις «αρχικές», φθάνουμε δηλαδή σε αυτή μέσω κενών μεταβάσεων από την αρχική I, και άρα ανήκει στο σύνολο $S_0 = ∅(I)$, δηλαδή ανήκει στην αρχική κατάσταση του Α'. Από τον ορισμό των μεταβάσεων του Α', η διάδοχη κατάσταση $S_1 = Δ(S_0, σ_1)$ θα περιέχει την K_1 αφού η S_0 περιέχει την K_0, και έχουμε στη διάθεσή μας την μετάβαση $K_0 \xrightarrow{\sigma_1} K_1$. Συνεχίζοντας έτσι, (*επαγωγικά* αν θέλετε), θα καταλήξουμε ότι στο τέλος το εξομοιωτικό αυτόματο Α' θα βρεθεί σε κατάσταση S_v, η οποία θα περιέχει την K_v. Αυτή όμως είναι αποδεκτική (για το A^+), και το ότι περιέχεται στην S_v, αρκεί για να καταστήσει και αυτή αποδεκτική (για το Α'). Άρα και στο Α' υπάρχει ένας περίπατος $S_0 \xrightarrow{\sigma_1} S_1 \xrightarrow{\sigma_2} S_2 \ \ldots \xrightarrow{\sigma_v} S_v$, από την αρχική σε μια αποδεκτική κατάσταση που παράγει την λ.

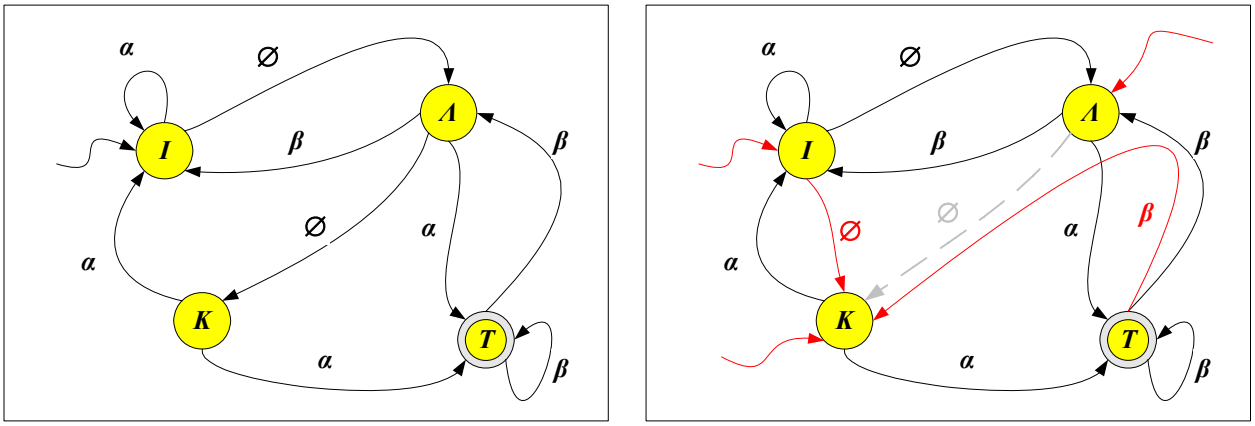
- Το προηγούμενο ισχύει και αντιστρόφως: Έστω ότι η $λ = σ_1 ... σ_v$ γίνεται αποδεκτή από τον περίπατο $S_0 \xrightarrow{\sigma_1} S_1 \xrightarrow{\sigma_2} S_2 \ \ldots \xrightarrow{\sigma_v} S_v$ στο εξομοιωτικό αυτόματο Α', όπου S_0 είναι η αρχική κατάσταση του Α', και S_v είναι μια αποδεκτική κατάσταση. Η S_v – ως αποδεκτική του Α' – πρέπει να περιέχει

μια τουλάχιστον αποδεκτική κατάσταση του A^+, έστω την K_v. Αλλά αφού έχουμε την μετάβαση $S_{v-1} \xrightarrow{\sigma_v} S_v$ στο Α', υπάρχει μια μετάβαση $K_{v-1} \xrightarrow{\sigma_v} K_v$ στο αρχικό A^+, αλλιώς η K_v δεν θα είχε συμπεριληφθεί στην S_v. (βλ. τον ορισμό του Α'). Συνεχίζοντας έτσι, (επαγωγικά), θα καταλήξουμε ότι στο αρχικό αυτόματο A^+ υπάρχει μια μετάβαση $K_0 \xrightarrow{\sigma_1} K_1$, όπου $K_0 \in S_0$. Αλλά η S_0 είναι η αρχική κατάσταση του εξομοιωτικού αυτομάτου, δηλαδή η ∅(I), δηλαδή το σύνολο των «αρχικών» καταστάσεων το A^+, (όσες στις οποίες φθάνουμε από την αρχική κατάσταση I μέσω κενών μεταβάσεων). Άρα και στο A^+ υπάρχει ένας περίπατος $K_0 \xrightarrow{\sigma_1} K_1 \xrightarrow{\sigma_2} K_2 \ldots \xrightarrow{\sigma_v} K_v$, από κάποια «αρχική» κατάσταση $K_0 \in$ ∅(I) σε μια αποδεκτική κατάσταση $K_v \in T$, που παράγει την λ. ■

Η τεχνική και η έννοια της «εξομοίωσης».

Στο προηγούμενο θεώρημα βλέπουμε ένα οπωσδήποτε μη-τετριμμένο παράδειγμα ***εξομοίωσης*** – μιας τεχνικής που διαρκώς επανέρχεται στην επιστήμη του υπολογισμού και των αλγορίθμων: έχουμε δύο μηχανές (*του ιδίου ή ακόμα και διαφορετικού τύπου*) Μ και Μ', και δείχνουμε ότι με μια εύλογη και φυσική αντιστοιχία των καταστατικών περιγραφών τους, είναι δυνατόν η 2η από αυτές Μ', όχι μόνον να επιφέρει από τα ίδια (= αντίστοιχα) δεδομένα τα ίδια (= αντίστοιχα) αποτελέσματα, αλλά κατά κάποια έννοια, τα επιφέρει ***με τον ίδιο τρόπο***, ακολουθώντας δηλαδή «κατά βήμα», τα όσα θα έκανε η 1η μηχανή Μ, για να επιφέρει τα δικά της αποτελέσματα από τα δικά της δεδομένα.
Αυτή η έννοια είναι κεντρικής σημασίας, διότι εάν ο τρόπος υπολογισμού μένει ο «ίδιος» (και όσο πιο «ίδιος» – αν μας επιτρέπετε την έκφραση – τόσο το καλύτερο), αυτό σημαίνει ότι οι δύο μηχανές «τρέχουν» τον ίδιο ***αλγόριθμο***, και αυτή είναι η πιο βαρυσήμαντη –αλλά και σκιώδης– έννοια που διατρέχει όλη τη θεωρία υπολογισμού, και, φυσικά, τη θεωρία αλγοριθμικής πολυπλοκότητας.

Παράδειγμα: Μετατροπή ενός μη-αιτιοκρατικού αυτομάτου σε αιτιοκρατικό.
Δίνουμε στη συνέχεια ένα παράδειγμα μετατροπής του μη-αιτοκρατικού αυτομάτου του επόμενου σχήματος σε αιτιοκρατικό, υπολογίζοντας τις οδηγίες, Δ'(σ, S), του νέου αιτιοκρατικού αυτομάτου.



Σχήμα: Μετατροπή μη-αιτιοκρατικού αυτομάτου σε αιτιοκρατικό.

Το 1ο βήμα δεν εμφανίζεται (και ούτως ή άλλως είναι το πιο απλό από όλα).
Το 2ο βήμα είδαμε ότι τελικά είναι περιττό, (αφού υλοποιείται «αυτομάτως» από τα υπόλοιπα).
Το 3ο βήμα παράγει εδώ μία σύνθετη μετάβαση ⟨I, ∅, K⟩ ως αποτέλεσμα των ⟨I, ∅, Λ⟩ και ⟨Λ, ∅, K⟩, με αποτέλεσμα οι «αρχικές» καταστάσεις να είναι οι { I, K, Λ }. Στη συνέχεια απαλείφουμε μία-προς-μία τις κενές μεταβάσεις. Στο σχήμα δείχνουμε μόνο την απαλειφή της ⟨Λ, ∅, K⟩: εξετάζοντας ποιές *μη-κενές* μεταβάσεις της μορφής ⟨-, -, Λ⟩ υπάρχουν, εντοπίζουμε την ⟨T, β, Λ⟩ (μόνον), άρα προσθέτουμε την σύνθετη μετάβαση ⟨T, β, K⟩ (ερυθρή ακμή στο σχήμα). Με την απαλειφή των υπολοίπων κενών

μεταβάσεων (οι σχετικές ακμές δεν εικονίζονται στο σχήμα), καταλήγουμε στους παρακάτω δύο πίνακες μεταβάσεων, έναν μέσω 'α' και έναν μέσω 'β'. Οι «κίτρινες» μεταβάσεις είναι όσες προστίθενται λόγω κενών μεταβάσεων.

	α →	I	K	Λ	T
1	I	*	*	*	
2	K	*	*	*	*
3	Λ				*
4	T				

	β →	I	K	Λ	T
1	I				
2	K				
3	Λ	*	*	*	
4	T		*	*	*

Το 4ο βήμα, θέλει απλώς υπομονή: για κάθε υποσύνολο S του { I, K, Λ, M } εξετάζουμε, για όλες τις κατάστασεις X ∈ S, όλες τις καταστάσεις Υ στις οποίες οδηγούμαστε με μεταβάσεις (X, α, Υ), και τις περισυλλέγουμε σε μια νέα κατάσταση S' = Δ(S, α). Το ίδιο και για τις μεταβάσεις μέσω β, τις Δ(S, β). Οι γραμμές 1 έως 4 ουσιαστικά επαναλαμβάνουν τους προηγούμενες πίνακες.

S:	I	K	Λ	T		**Δ'(S, α)**	**Δ'(S, β)**
0	-	-	-	-		∅	∅
1	*	-	-	-		{ I, K, Λ }	{ } = ∅
2	-	*	-	-		{ I, K, Λ }	{ } = ∅
3	-	-	*	-		{ T }	{ I, K, Λ }
4	-	-	-	*		{ } = ∅	{ K, Λ, T }
5	*	*	-	-		{ I, K, Λ }	{ } = ∅
6	*	-	*	-		{ I, K, Λ, T }	{ I, K, Λ }
7	*	-	-	*		{ I, K, Λ }	{ K, Λ, T }
8	-	*	*	-		{ I, K, Λ, T }	{ I }
9	-	*	-	*		{ I, K, Λ }	{ K, Λ, T }
10		-	*	*		{ T }	{ I, K, Λ }
11	*	*	*	-		{ I, K, Λ, T }	{ I, K, Λ }
12	*	*	-	*		{ I, K, Λ }	{ K, Λ, T }
13	*	-	*	*		{ I, K, Λ, T }	{ I, K, Λ, T }
14	-	*	*	*		{ I, K, Λ }	{ I, K, Λ, T }
15	*	*	*	*		{ I, K, Λ, T }	{ I, K, Λ, T }

Η αφετηριακή κατάσταση-σύνολο είναι χρωματισμένη με κίτρινο, και οι αποδεκτικές, (= εδώ, όσες περιέχουν την T), με γκρί χρώμα.

■

7ο Πεπερασμένα αυτόματα: τα θεωρήματα «κλειστότητας».

Η «θετική» προσέγγιση: από παλιές ομαλές γλώσσες σε νέες.

Η «κλειστότητα» είναι μια μαθηματική έννοια που επανέρχεται συνεχώς και είναι ιδιαίτερα βαρυσήμαντη. Το πεδίο εφαρμογής της είναι μια συλλογή «αντικειμένων» Χ επί των οποίων ορίζονται διάφορες κατασκευαστικές πράξεις: π.χ. επί των πραγματικών αριθμών ορίζεται η πράξη της διαίρεσης ή της κυβικής ρίζας.

Το επανερχόμενο ερώτημα είναι το εξής: εάν από διάφορα αντικείμενα της συλλογής Χ που έχουν μια πρόσθετη ενδιαφέρουσα ιδιότητα Ι κατασκευάσουμε μέσω μιας πράξης #, ένα άλλο αντικείμενο της Χ, τότε αυτό θα έχει εκ νέου την ιδιότητα Ι ή ίσως όχι. Π.χ. οι ρητοί αριθμοί είναι «κλειστοί» ως προς την πράξη της διαίρεσης: διαιρώντας ένα ρητό με έναν άλλο λαμβάνουμε έναν εκ νέου ρητό αριθμό· δεν είναι όμως «κλειστοί» ως προς την πράξη της κυβικής ρίζας: υπάρχουν ρητοί αριθμοί η κυβική ρίζα των οποίων είναι μεν «πραγματικός» αριθμός, όχι όμως ρητός.

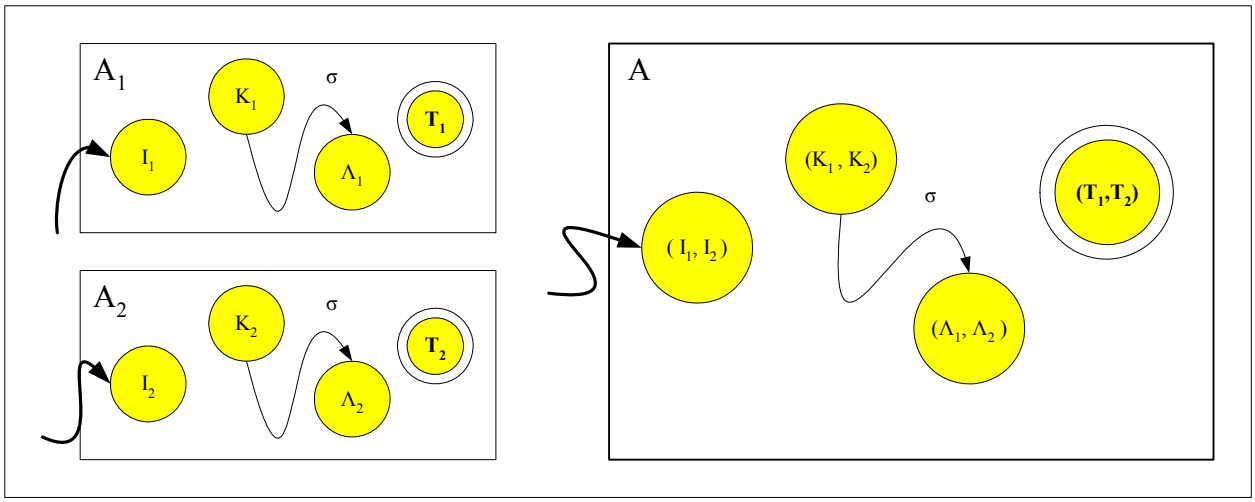
Επί των γλωσσών ορίζονται κατά φυσικό και εύλογο τρόπο διάφορες «πράξεις», είτε συνολοθεωρητικού, είτε γραμματικο-συντακτικού χαρακτήρα. Οι ομαλές γλώσσες είναι κλειστές ως προς αυτές τις πράξεις ή όχι; Αυτό θα εξετάσουμε στην τρέχουσα ενότητα.

Να σημειώσουμε εδώ πως αυτή η ανάλυση θα έχει «θετικό» χαρακτήρα: θα μας δείξει ότι εάν έχουμε κάποιας ομαλές γλώσσες τότε είναι δυνατόν από αυτές να ορίσουμε ή/και συνθέσουμε *νέες* και *επίσης* ομαλές γλώσσες.

Θεώρημα: Κλειστότητα ως προς συνολοθεωρητικές πράξεις.
Ισχυρισμός: Γιά κάθε αιτιοκρατικό αυτόματο Α, (ή δύο αυτόματα A_1, A_2) που αποδέχονται τις γλώσσες $L(A)$, $L(A_1)$, $L(A_2)$ υπάρχει ένα αυτόματο που αποδέχεται τις εξής:

(1) $L(A_1) \cap L(A_2)$ («*τομή*»)
(2) $L(A_1) \cup L(A_2)$ («*ένωση*»)
(3) $\Sigma^* - L(A)$ («*συμπλήρωμα*»)

Σχέδιο απόδειξης:



Σχήμα: Σύνθεση δύο αυτομάτων για την αποδοχή της τομής, $L(A_1) \cap L(A_2)$.

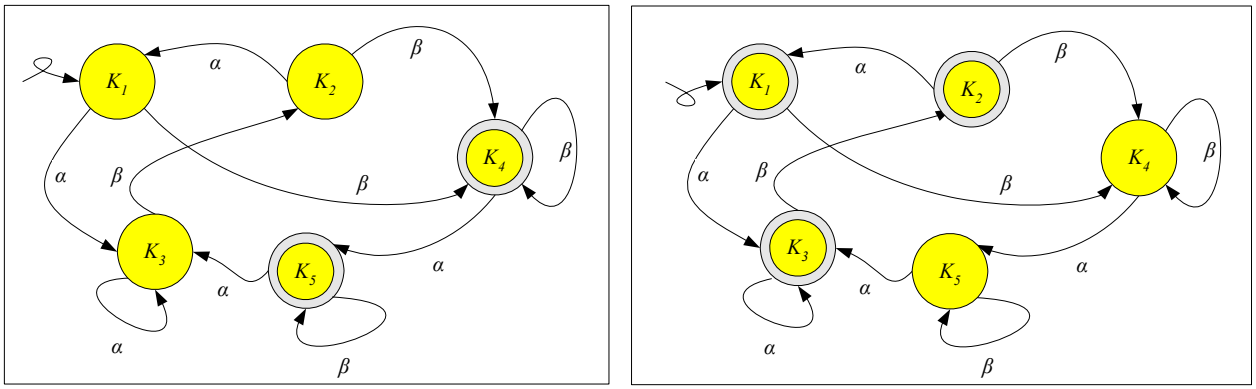
1) Ορίζουμε αυτόματο του οποίου οι καταστάσεις συμβολίζουν *ζεύγη* καταστάσεων (K_1, K_2) των A_1, A_2. Για *κάθε* κατάσταση (K_1, K_2) και *κάθε* σύμβολο σ πηγαίνουμε στη κατάσταση - ζεύγος:

$$\Delta((K_1,K_2),\ \sigma) \ = \ (\Delta_1(K_1, \sigma),\ \Delta_2(K_2, \sigma))$$

δηλαδή ακολουθούμε τις μεταβάσεις Δ_1 του A_1 στο πρώτο μέλος του ζεύγους (K_1,K_2), και τις μεταβάσεις Δ_2 του A_2 στο δεύτερο μέλος του ζεύγους. Η αρχική κατάσταση είναι η (I_1, I_2) και τερματικές καταστάσεις είναι όλα τα ζεύγη *και τα δύο μέλη* των οποίων είναι τερματικές καταστάσεις στα A_1 και A_2 (αντιστοίχως). Ένας περίπατος στο νέο αυτόματο αντιστοιχεί σε (δύο) περιπάτους στά A_1 και A_2 και έτσι γίνεται αποδεκτό ότι μόνο ότι θα γινόταν αποδεκτό και από τα δύο αυτόματα.

2) Φτιάχνουμε ένα αυτόματο όπως στη περίπτωση (1), μόνο που τώρα τερματικές καταστάσεις είναι όσα ζεύγη καταστάσεων (στο νέο αυτόματο) περιέχουν *έστω μία* τερματική κατάσταση των A_1, A_2. Έτσι αποδεκτές γίνονται όσες και μόνον λέξεις γίνονται αποδεκτές από ένα τουλάχιστον των A_1, A_2.

3) Το ίδιο αυτόματο, μετατρέποντας τις μη-τερματικές καταστάσεις σε τερματικές και αντίστροφα, αποδέχεται ότι το A δεν αποδέχεται άρα αποδεχεται την $\Sigma^* - L(A)$. Προσέξτε ότι αυτό οφείλεται στην αιτιοκρατικότητα του αρχικού αυτομάτου, χάρι στην οποία μια λέξη λ όταν γίνεται αποδεκτή γίνεται χάρι στην μία ακριβώς τερματική κατάσταση που καταλήγει. Εάν λόγω μη αιτιοκρατικότητας μια λέξη λ κατέληγε λ.χ. σε δύο καταστάσεις, σε μια K (αποδεκτική) και σε μια άλλη K' (απορριπτική), τότε η λ θα ήταν αποδεκτή στο A (λόγω της K), αλλά θα ήταν αδύνατον να αντιστρέψουμε τον ρόλο των K και K' διότι τότε θα η λ θα παρέμενε αποδεκτή στο νέο αυτόματο (λόγω της K'...), και έτσι η λ θα ανήκε τόσο στην L(A) όσο και στο (υποτιθέμενο) συμπλήρωμά της – πράγμα που θα ήταν προφανώς εσφαλμένο.



Σχήμα: Μετατροπή αιτιοκρατικού αυτομάτου για την αποδοχή του συμπληρώματος, $\Sigma^* - L(A)$.

■

Μπορούμε, επίσης, να ορίσουμε νέες γλώσσες από παλιές και μέσω γραμματικών πράξεων. Οι τρείς πιο προφανείς τρόποι περιγράφονται παρακάτω:

$L(A_1) \| L(A_2)$	«*παράθεση*»	των $L(A_1) \| L(A_2)$	$L = \{\lambda: \lambda=xy,\ x\in L(A_1)$ και $y\in L(A_2)\ \}$
$L(A)^*$	«*επανάληψη*»	της L(A), ≥ 0 φορές	$L = \{\lambda: \lambda= \lambda_1 \dots \lambda_\nu,\ \nu \geq 0,$ και $\lambda_\kappa \in L(A),\ 0 \leq \kappa \leq \nu\ \}$
$L(A)^+$	«*επανάληψη*»	της L(A), ≥ 1 φορές	$L = \{\lambda: \lambda= \lambda_1 \dots \lambda_\nu,\ \nu \geq 1,$ και $\lambda_\kappa \in L(A),\ 0 \leq \kappa \leq \nu\ \}$
$L(A)^R$	«*κατοπτρική*»	της L(A)	$L = \{\ \lambda^R : \lambda \in L(A)\ \}$

(Ένας κομψός επαγωγικός ορισμός της κατοπτρικής λέξης λ^R για $\lambda \in \Sigma^*$ είναι:

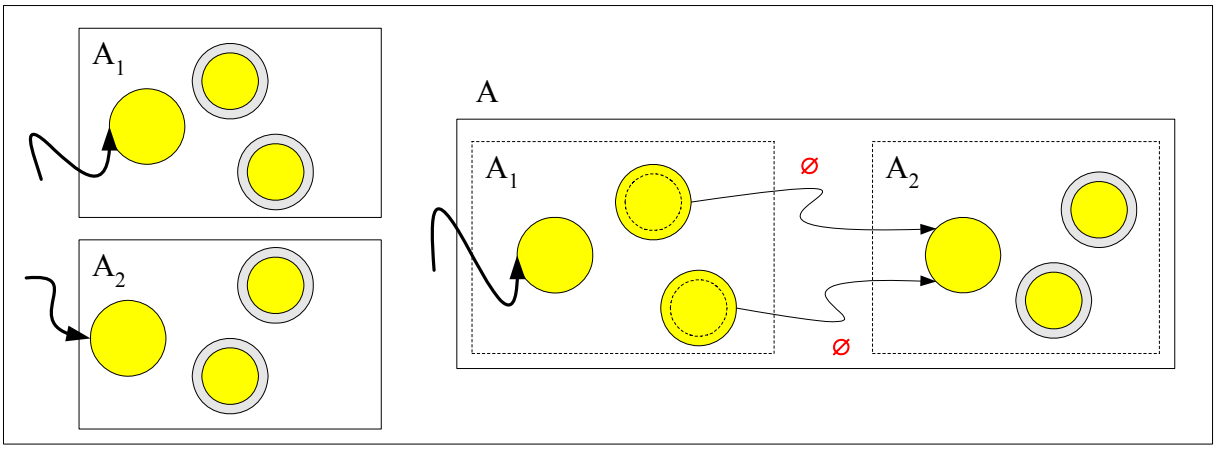
$$\textit{εάν } \lambda = \varnothing \textit{ τότε } \lambda^R = \varnothing,\ \ \textit{αλλοιώς } \lambda = \lambda' \sigma \ \text{ για } \lambda \in \Sigma^*, \sigma \in \Sigma, \text{ και } (\lambda)^R = (\lambda'\sigma)^R = \sigma\,(\lambda'^R).\ )$$

Θεώρημα: Κλειστότητα ως προς «γραμματικές» πράξεις).
Ισχυρισμός: Για οποιαδήποτε αυτόματα A, A_1, A_2 που αποδέχονται τις γλώσσες L(A), $L(A_1)$, $L(A_2)$ υπάρχει αυτόματο, A', το οποίο αναγνωρίζει τις γλώσσες:

(1) $L(A_1) \| L(A_2)$ («*παράθεση*»)
(2) $L(A)^*$ («*(αόριστη) επανάληψη*»)
(3) $L(A)^R$ («*κατοπτρική*»)

Σχέδιο απόδειξης:

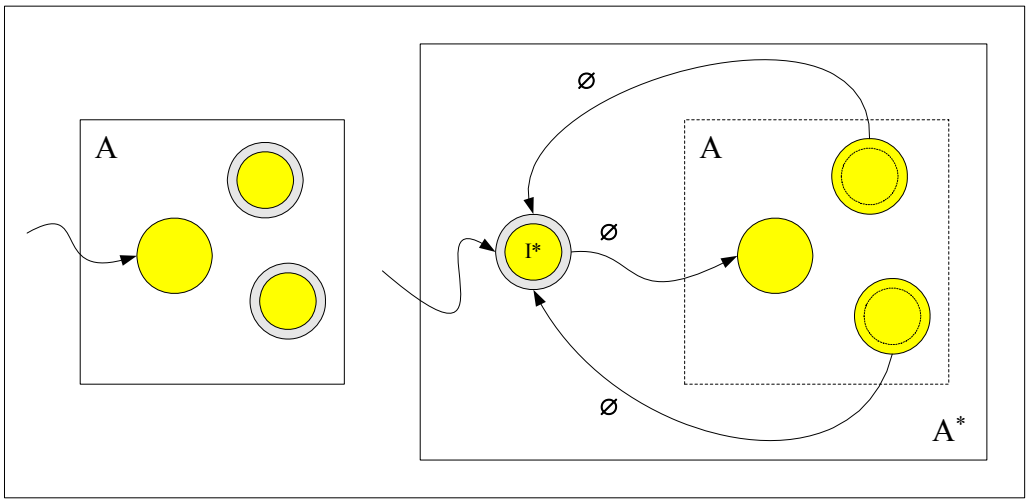
1) Υποθέτουμε χωρίς απώλεια γενικότητας ότι τα δύο αυτόματα δεν χρησιμοποιούν ίδια ονόματα για τις καταστάσεις τους ώστε να μην έχουμε σύγχιση – (αλλοιώς απλώς τις μετονομάζουμε καταλλήλως ώστε να είναι όλες διαφορετικές μεταξύ τους). Ενώνουμε τις οδηγίες των δύο αυτομάτων σε ένα ενιαίο σύνολο. Νέα αρχική κατάσταση είναι η του A_1, και νέες αποδεκτικές καταστάσεις είναι οι του A_2. Οι αποδεκτές καταστάσεις του A παύουν να είναι αποδεκτές και οδηγούν με την κενή λέξη ∅ στην αρχική κατάσταση του A η οποία παύει να θεωρείται φυσικά αρχική.



Σχήμα: Σύνθεση δύο αυτομάτων για την αποδοχή της παράθεσης, $L(A_1) \parallel L(A_2)$.

2) Η αρχική και οι αποδεκτικές καταστάσεις του A παύουν να είναι τέτοιες, και προσθέτουμε τα εξής:

- Μια νέα αρχική κατάσταση που είναι ταυτόχρονα και τερματική, ώστε να αποδεχθούμε την κενή λέξη (δηλαδή τις μηδέν επαναλήψεις της L(A)).
- Μια κενή μετάβαση από την νέα αρχική κατάσταση στην πρώην αρχική κατάσταση του A ώστε να μπορούμε να αποδεχθούμε μια λέξη που θα αποδεχόταν το A.
- Κενές μεταβάσεις από κάθε πρώην αποδεκτική κατάσταση στην νέα αρχική (και τερματική) κατάσταση ώστε μετά από μία λέξη αποδεκτή από το A να μπορούμε να αναγνωρίσουμε οσεσδήποτε άλλες «εξ αρχής».

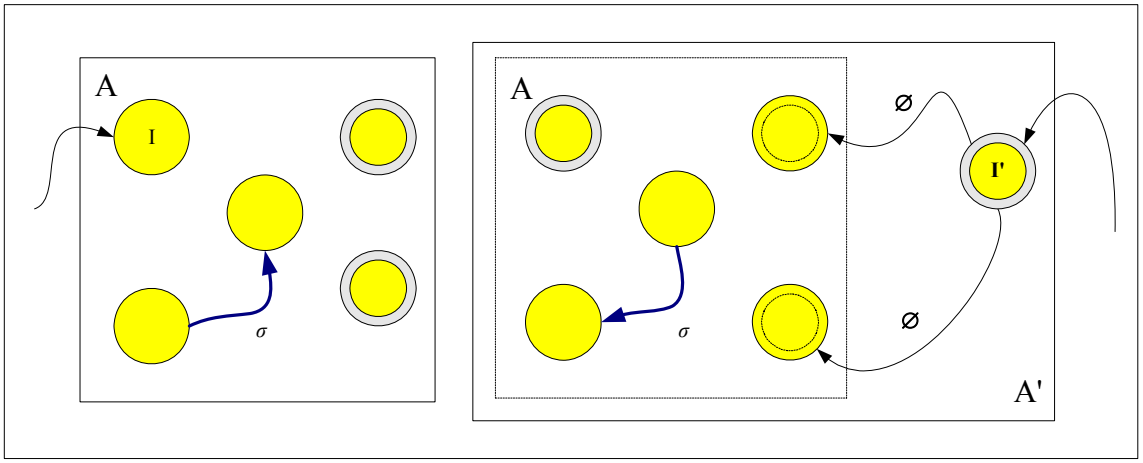


Σχήμα: Σύνθεση δύο αυτομάτων για την αποδοχή της αόριστης επανάληψης, L(A)*.

Για τον χειρισμό της $L(A)^+$ αρκεί η νέα αρχική κατάσταση που εισάγουμε να μην είναι αποδεκτική!

3) Αντιστρέφουμε τις φορές όλων των μεταβάσεων: κάθε μετάβαση $K\,\sigma \to K'$ αντιστρέφεται σε $K'\sigma \to K$. Η αρχική κατάσταση I, γίνεται η μόνη νέα αποδεκτική κατάσταση $T' = \{I\}$, και οι πρώην αποδεκτικές καταστάσεις T, παύουν να είναι πλέον τέτοιες και γίνονται «αρχικές» με την προσθήκη

μία νέας αρχικής κατάστασης I', η οποία μέσω της κενής λέξης οδηγεί σε αυτές. Κατ' αυτόν τον τρόπο κάθε περίπατος στο νέο αυτόματο, εάν ληφθεί αντιστρόφως («κατοπτρικά»), αντιστοιχεί σε ταυτόσημο περίπατο (αντιστοιχεί στην ίδια λέξη) στο αρχικό αυτόματο.



Σχήμα: Μετατροπή ενός αυτόματου για την αποδοχή της κατοπτρικής, $L(A)^R$.

■

Η «αναλυτική» αξιοποίηση των θεωρημάτων κλειστότητας.

Τα θεωρήματα κλειστότητας έχουν *κατασκευαστικό* χαρακτήρα, καθώς μας λένε ότι εάν έχουμε κάποιες ομαλές/κανονικές γλώσσες, τότε μπορούμε από αυτές να ορίσουμε *νέες* και *επίσης ομαλές*, γλώσσες και μάλιστα να «κατασκευάσουμε» τα σχετικά αυτόματα. Στη πράξη όμως, πολλές φορές δεν θα χρειαστεί να ορίσουμε νέες γλώσσες, αλλά έχοντας ήδη κάποια γλώσσα L – ορισμένη με άλλους τρόπους και όχι μέσω ενός πεπερασμένου αυτομάτου – θα χρειαστεί συχνά να διαπιστώνουμε ακριβώς *το εάν αυτή μπορεί να οριστεί ή όχι μέσω ενός αυτομάτου*.

Σε τέτοιες περιπτώσεις περίπτωση η γενικότατη μέθοδος που καλείται σε χρήση είναι *η διάσπαση του προβλήματος σε μικρότερα, και η κατασκευή της συνολικής λύσης από τις επί μέρους λύσεις*. Η μέθοδος αυτή δεν αφορά μόνο στην θεωρία υπολογισμού, αλλά σε κάθε σχεδον πρακτική, επιστημονική, τεχνολογική, μαθηματική, ή και απλά καθημερινή δραστηριότητα. Η διάσπαση ενός προβλήματος σε «μικρότερα» μπορεί να γίνει με όποιο τρόπο επιδέχεται η φαντασία μας, αλλά η ανησυχία που προκαλεί αυτή η μέθοδος είναι το εάν θα είναι δυνατή η σύνθεση των επί μέρους λύσεων.

Τα θεωρήματα κλειστότητας έρχονται να απαντήσουν αυτό το ερώτημα, διότι «μας λένε» ότι εάν για την αποσύνθεση μιας γλώσσας σε άλλες χρησιμοποιήσουμε τις πράξεις $\cap$, $\cup$, $-$, ή τις πράξεις $(\,)^*$, $\|$, $(\,)^R$, τότε η σύνθεση *θα είναι δυνατή* και μάλιστα κατά τον επιθυμητό τρόπο: εάν οι επί μέρους γλώσσες προκύψυν ομαλές, τότε και η αρχική γλώσσα θα είναι επίσης ομαλή και θα αναγνωρίζεται/παράγεται από κάποιο αυτόματο.

Παράδειγμα: ένα αυτόματο που καταλαβαίνει ποιοί δυαδικοί διαιρούνται δια 6.

Έχουμε δεί προηγουμένως ότι υπάρχει αυτόματο που αποδέχεται την γλώσσα $L_{3\times} \subseteq \{0,1\}^*$ των (δυαδικών) πολλαπλασίων του 3. Είναι πολύ απλό να δείτε ότι και η $L_{2\times}$ είναι επίσης ομαλή γλώσσα: πρέπει και αρκεί το τελευταίο ψηφίο να είναι '1'. Τί θα κάναμε όμως για την $L_{6\times}$; Μια σκέψη 2-3 δευτερολέπτων μας λύνει το πρόβλημα: η $L_{6\times}$ είναι η τομή των $L_{2\times}$ και $L_{3\times}$ – διότι ένας αριθμός διαιρείται δια 6 εάν και μόνον διαιρείται *και* δια 2 *και* δια 3, δηλαδή, $L_{6\times} = L_{2\times} \cap L_{3\times}$. Επομένως, από τα θεωρήματα κλειστότητας, και η $L_{6\times}$ είναι ομαλή γλώσσα.

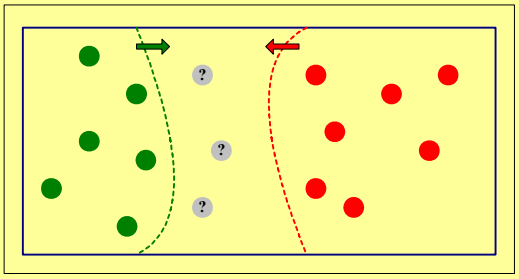
■

8ο Πεπερασμένα αυτόματα: το «λήμμα άντλησης» και περιορισμοί.

Η «αρνητική» προσέγγιση: γλώσσες μη αποδεκτές από κανένα αυτόματο.

Το εξής ερώτημα έχει κεντρική και θεμελιακή σημασία, (και στη περίπτωση των αυτομάτων αλλά και σε (πολλές) ανάλογες περιπτώσεις): πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε την υπολογιστική ισχύ αυτών των μηχανών που ονομάσαμε «αυτόματα»; Μήπως λ.χ. υπάρχει για κάθε οποιαδήποτε γλώσσα κάποιο πεπερασμένο αυτόματο που την αναγνωρίζει; Θα δούμε πώς τα πράγματα δεν έχουν έτσι· αντιθέτως, είναι πολύ εύκολο να ορίσει κάποιος γλώσσες που δεν γίνονται αποδεκτές από κανένα αυτόματο.

Να σημειώσουμε πως εδώ η ανάλυση θα έχει «αρνητικό» χαρακτήρα: θα μας δείξει ότι υπάρχουν γλώσσες που δεν γίνονται αποδεκτές από *κανένα* πεπερασμένο αυτόματο. Ας φανταστούμε ένα πλαίσιο, στο οποίο κάθε κουκίδα αναπαριστά μία γλώσσα επί αλφαβήτου έστω Σ. Αυτό που κάναμε στην προηγούμενη ενότητα είναι να χαράξουμε ένα «θετικό» όριο (βλ. επόμενο σχήμα, αριστερά) εντός του οποίου κάθε γλώσσα είναι ομαλή, και να «σπρώξουμε» αυτό το όριο όσο μπορούσαμε προς τα δεξιά.



Σχήμα: Γλώσσες $L \subseteq \Sigma^*$, και δύο όρια «χαρακτηρισμού» ως ομαλές ή μή.

Αυτό που θα κάνουμε στη τρέχουσα ενότητα είναι να χαράξουμε ένα «αρνητικό» όριο (βλ. Παραπάνω σχήμα, δεξιά) εντός του οποίου κάθε γλώσσα *δεν* είναι ομαλή, και να «σπρώξουμε» αυτό το όριο όσο μπορούμε προς τα αριστερά.

Αλλά αυτό το έργο *δεν* είναι συμμετρικό με το προηγούμενο. Μια γλώσσα γ είναι ομαλή εάν υπάρχει *έστω-ένα* αυτόματο α ικανό να την αποδέχεται, αλλά είναι μη-ομαλή, εάν *κάθε* αυτόματο είναι ανίκανο να την αποδεχθεί (αυτήν ακριβώς). Συγκεκριμμένα, έστω ότι Φ(x, y) είναι η μαθηματική πρόταση που διατυπώνει τον ισχυρισμό ότι το (αυτόματο) x αποδέχεται την (γλώσσα) y.

- Το ότι μια γλώσσα γ είναι ομαλή, γράφεται: $\exists x\, \Phi(x, \gamma)$ (#1)
- Το ότι μια γλώσσα γ δεν είναι ομαλή, γράφεται: $\forall x \neg\Phi(x, \gamma)$ (#2)

Υπάρχει εδώ μια δομική-λογική διαφορά ανάμεσα στους δύο ισχυρισμούς.

- Ο 1ος είναι *υπαρξιακός* (∃): Για να τον αποδείξουμε αρκεί να φέρουμε έστω ένα παράδειγμα-α, ότι δηλαδή για κάποιο x ← α, αληθεύει ο ισχυρισμός Φ(α,γ).
- Ο 2ος είναι *καθολικός* (∀): Για να τον αποδείξουμε δεν αρκεί να φέρουμε όχι ένα, αλλά ούτε εκατομμύρια παραδείγματα α τέτοια ώστε ¬Φ(α, γ).

Η πιο συνηθισμένη τεχνική για να δείξουμε ότι ισχύει μια πρόταση σαν την #2, είναι να «απαλείψουμε» το αυτόματο x, να δείξουμε ότι η ισχύς της Φ(x, γ) έχει μια λογική συνέπεια για τη γλώσσα γ – ότι δηλαδή, την αναγκάζει να έχει μια γλωσσική ιδιότητα Ψ(γ): $\forall\alpha\forall\gamma\, (\Phi(\alpha, \gamma) \rightarrow \Psi(\gamma))$ (#3). Στη συνέχεια αρκεί και πάλι να δώσουμε απλώς ένα «αντι-παράδειγμα» μιας γλώσσας ξ που *δεν* έχει αυτή την ιδιότητα, ότι δηλαδή ¬Ψ(ξ). Το ξ θα αποδείκνυε το ζητούμενο «με απαγωγή στο άτοπο».

Η απόδειξη μιας πρόταση σαν την (#3) φαίνεται λίγο πιο εύκολο καθήκον από την απόδειξη της (#2) διότι το συμπέρασμα αφορά σε ένα αντικείμενο (τη γλώσσα γ), και διότι η υπόθεσή της (#3) είναι κάπως πιο ισχυρή από εκείνη της (#2): άλλο να

υποθέτεις απλώς ότι το x είναι ένα απλώς αυτόματο, και άλλο να υποθέτεις ότι το x είναι αυτόματο *και* αποδέχεται την γλώσσα y (βλ. Φ(α, γ)).

Λέμε «λίγο πιο εύκολο» – διότι δεν πρέπει να μας διαφύγει το πόσο «βαρειά» σημασία έχει ο ισχυρισμός Φ(x, γ) → Ψ(γ): λέει ότι υπάρχει μια «κοινή» ιδιότητα Ψ(-) που έχουν *όλες* οι ομαλές γλώσσες – παρόλο που αυτές είναι άπειρες στο πλήθος, οι «περισσότερες» από αυτές έχουν άπειρο πλήθος λέξεων, και τα αλφάβητά τους, αν και πεπερασμένα μπορεί να έχουν οσοδήποτε μεγάλο μέγεθος. Το ερχόμενο «λήμμα άντλησης» θα μας προσφέρει ακριβώς μια τέτοια ιδιότητα.

Θεώρημα: «το λήμμα άντλησης»

Ισχυρισμός: Εάν μια γλώσσα L(A), αναγνωρίζεται από αιτιοκρατικό αυτόματο A = ⟨Σ, Σκ, I, T, Δ⟩ τότε:
(α) κάθε λέξη επαρκώς μεγάλου μήκους λέξη λ ∈ L(A), (συγκεκριμμένα: |λ| ≥ |Σκ|), γράφεται ως:

$$\lambda = \alpha\ \mu\ \mu\ \mu\ \mu\ \tau\ \ldots\ \alpha \quad \text{ή} \quad \lambda = \alpha\ \mu^{(\kappa)}\ \tau$$

όπου τα α, μ , τ είναι λέξεις του Σ*, και μ ≠ ∅, (ή |μ| ≥ 1).
(β) κάθε λέξη της μορφής $\alpha\ \mu^{(i)}\ \tau$, i = 0, 1, 2,... ανήκει στην γλώσσα L(A).

Σχέδιο απόδειξης: Κάθε λέξη λ μήκους ν = |λ| ≥ |Σκ| που γίνεται αποδεκτή από το A, παράγεται από κάποιο περίπατο εντός του αυτομάτου, $I = K_0 \xrightarrow{\sigma_1} K_1 \xrightarrow{\sigma_2} K_2 \ \ldots \xrightarrow{\sigma_v} K_v \in T$. Αυτές όμως έχουν πλήθος (ν+1) > |Σκ|, ενώ το πλήθος των καταστάσεων είναι μόνον |Σκ|. Επομένως δύο από αυτές ταυτίζονται [6] έστω οι K_i και K_j: $K_i = K_j$. Η λέξη λ λοιπόν αντιστοιχεί σε τρείς υπολέξεις α, μ, τ, (αρχή-μέση-τέλος):

- στη λέξη α που παράγεται από την διαδρομή μέχρι την πρώτη εμφάνιση της κατάστασης K_i.
- στη λέξη μ που παράγεται από την επανάληψη κ ≥ 1 φορές ενός «κυκλικού» περιπάτου $K_i \to K_i$, και
- στη λέξη τ που παράγεται από την τελευταία εμφάνιση της K_i έως την κατάσταση K_v.

Επομένως η λέξη λ έχει την μορφή $\alpha\ \mu^{(\kappa)}\ \tau$. Ακολουθώντας την ίδια διαδρομή με μόνη διαφορά την επανάληψη του κυκλικού περιπάτου $K_i \to K_i$ οποιοδήποτε πληθος φορών k ≥ 0, θα έχουμε ότι κάθε λέξη της μορφής $\alpha\ \mu^{(k)}\ \tau$, για k = 0, 1, 2, ... γίνεται επίσης αποδεκτή.

Προσοχή: τα παραπάνω δεν εξασφαλίζουν ότι *κάθε* λέξη της L(A) έχει την μορφή $\alpha\ \mu^{(k)}\ \tau$, αλλά μόνον το αντίστροφο: κάθε λέξη με αυτή τη μορφή είναι λέξη της L(A).

■

Πόρισμα: μια «θεμελιακή» μη-ομαλή γλώσσα.

Ισχυρισμός: Δεν υπάρχει πεπερασμένο αυτόματο το οποίο να αποδέχεται την γλώσσα:

$$L_? = \{\ x^{(v)}\ y^{(v)} : v \geq 0\ \} \quad (\ x \neq y\ )$$

Σχέδιο απόδειξης: Έστω ότι η $L_?$ είναι ομαλή γλώσσα. Τότε κατά το προηγούμενο λήμμα μία επαρκώς μεγάλη λέξη λ της $L_?$ (και *υπάρχει τέτοια* αφού η $L_?$ έχει λέξεις τόσο μακρές όσο θέλουμε), θα πρέπει να γράφεται ως $\lambda = \alpha\ \mu^{(\kappa)}\ \tau$, και ότι όλες οι λέξεις της μορφής $\alpha\ \mu^{(k)}\ \tau$, για κάθε k ≥ 0 θα πρέπει να ανήκουν στην $L_?$, θα είναι δηλαδή όλες της μορφής $\alpha^{(v)}\ \beta^{(v)}$ (για κάποιο ν). Το επαναλαμβανόμενο όμως μεσαίο μέρος μ θα είναι 2+1 ειδών:

- Αποτελείται μόνο από «x». Αυτό δεν είναι όμως δυνατόν διότι εάν η $\lambda = \alpha\ \mu^{(k)}\ \tau$ περιέχει ίσο πλήθος από «x» και «y» τότε η $\alpha\ \mu^{(k+1)}\ \tau$ (με ένα μεσαίο τμήμα μ επί πλέον) δεν μπορεί να έχει πια ίσο πλήθος «x» και «y» αφού θα έχει πια περισσότερα x από y.
- Αποτελείται μόνο από «y». Κατ' αναλογία με το προηγούμενο, ούτε αυτό είναι δυνατόν.
- Περιλαμβάνει και «x» και «y», είναι δηλαδή της μορφής μ = … xy…, (ή μ = …yx…). Αυτό δεν είναι όμως δυνατόν διότι τότε η λέξη $\alpha\ \mu^{(2)}\ \tau$ (που κατά το λήμμα άντλησης επίσης ανήκει στη γλώσσα L(A)), δεν έχει όλα τα «x» στην αρχή και όλα τα «y» στο τέλος, αφού μμ = …xy…xy… (ή ...yx...yx...).

Καταλήγουμε λοιπόν σε όλες τις περιπτώσεις σε άτοπο, επομένως η $L_?$ δεν μπορεί να είναι ομαλή γλώσσα. Με εντελώς ανάλογο τρόπο μπορούμε να δείξουμε πως ούτε η γλώσσα $\{\ x^{(v)}\ y\ x^{(v)} : v \geq 0\ \}$ είναι ομαλή.

[6] Όπως γνωρίζουμε από τα διακριτά μαθηματικά και «*την αρχή του περιστερώνα*» ή «του *Dirichlet*».

■

Το λήμμα άντλησης καθίσταται πιο αποδοτικό και χρήσιμο να συνδυαστεί «έξυπνα» με τα θεωρήματα κλειστότητας. Δείτε τα εξής παραδείγματα:

Πόρισμα-παράδειγμα: η γλώσσα των «ισορροπημένων παρενθέσεων» είναι μη-ομαλή.
Ισχυρισμός: Η γλώσσα $\Gamma_{[\,]} \subseteq \{\ [\ ,\ ]\ \}^*$ των «ισορροπημένων» παρενθέσεων δεν είναι ομαλή. (ισορροπημένες παρενθέσεις: μια σειρά παρενθέσεων, λ.χ. [[ ] [ ]] [[[ ] [ ]]], όπου κάθε παρένθεση «ανοίγει» και «κλείνει» σωστά).

Σχέδιο απόδειξης: Η γλώσσα $\Gamma_{[\,]}$ περιέχει το σύνολο των λέξεων $\{\ [^{(\nu)}\ ]^{(\nu)}\colon \nu \geq 1\ \}$, γλώσσα που μόλις πρίν είδαμε ότι δεν είναι ομαλή. Ας προσέξουμε όμως εδώ ότι αυτό δεν εξασφαλίζει την μη-ομαλότητα της $\Gamma_{[\,]}$: αν μια γλώσσα Γ περιέχει μια άλλη μή-ομαλή αυτό δεν σημαίνει και ότι η ίδια δεν είναι ομαλή... Π.χ. η γλώσσα $\Gamma = \{x, y\}^*$, που περιέχει όλες τις δυνατές λέξεις επί του αλφαβήτου {x, y}, είναι ομαλή, και το αυτόματο που την αναγνωρίζει είναι το πιο απλό από όλα... (ποιό;). Και όμως αυτή η γλώσσα Γ περιέχει την ανώμαλη γλώσσα $L_? = \{x^{(\nu)}\, y^{(\nu)}\}$ – (και για την ακρίβεια: περιέχει *κάθε* ανώμαλη γλώσσα επί του {x, y} !).
Αυτό που κάνει μια γλώσσα ανώμαλη δεν είναι το μέγεθος της αλλά η «μορφή» της ή το «περίγραμμά» της – μιλώντας κάπως διαισθητικά. Γι' αυτό θα χρησιμοποιήσουμε μια γλώσσα Λ που είναι ομαλή και που μας βοηθάει να διευκρινίσουμε με ακρίβεια και αυστηρότητα αυτό που φταίει στη γλώσσα των ισορροπημένων παρενθέσεων. Η γλώσσα αυτή έχει την μορφή $\Lambda = \{\ [^{(\kappa)}\ ]^{(\lambda)},\ \kappa, \lambda \geq 0\ \}$ και είναι μια γλώσσα με λέξεις από παρενθέσεις όπου στη αρχή υπάρχει ένα *οποιοδήποτε* πλήθος από αριστερές παρενθέσεις, και στο τέλος ένα *οποιοδήποτε* πλήθος από δεξιές παρενθέσεις – όχι κατ' ανάγκη το ίδιο. Είναι εύκολο να βεβαιώσουμε ότι αυτή η γλώσσα είναι ομαλή. Αλλά η τομή της με την γλώσσα των ισορροπημένων παρενθέσεων $\Gamma_{[\,]}$ είναι μια ανώμαλη γλώσσα (!) – η $\Gamma_? = \{\ [^{(\nu)}\ ]^{(\nu)}\ \}$:

$$\Gamma_? = \Gamma_{[\,]} \cap \Lambda$$

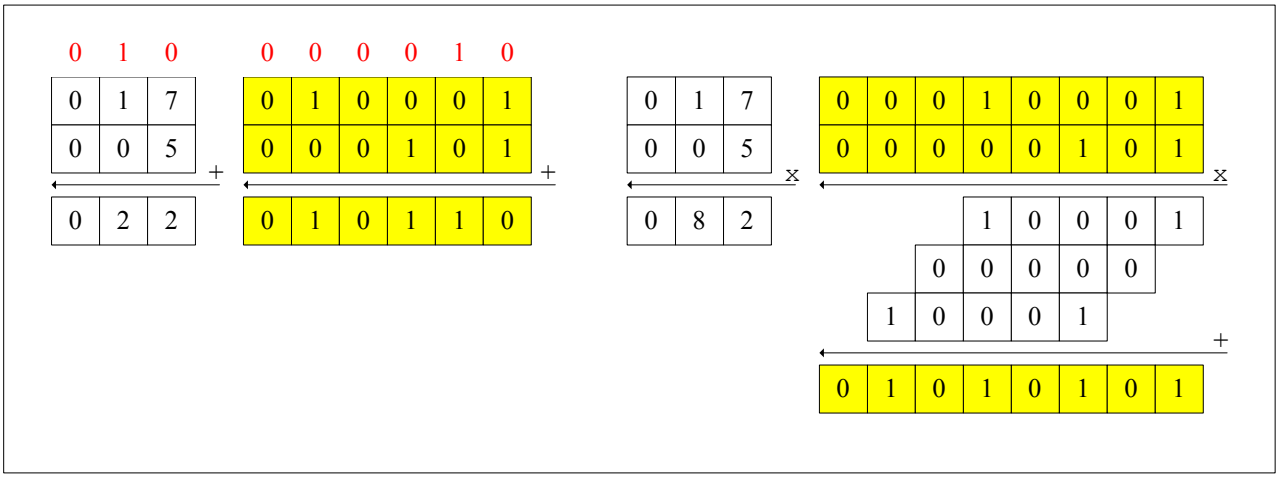
Και εδώ συνεργούν τα θεωρήματα κλειστότητας: η Λ είναι ομαλή, και εάν ήταν και η $\Gamma_{[\,]}$, τότε θα ήταν και η τομή τους, δηλαδή η $\Gamma_?$, αλλά γνωρίζουμε ήδη ότι αυτή δεν είναι – άρα έχουμε άτοπο: ούτε η $\Gamma_{[\,]}$ μπορεί να είναι ομαλή. Η γλώσσα Λ μας χρησίμευσε για να αποσπάσουμε από την υπό εξέταση γλώσσα ένα υποσύνολο που θα «έπρεπε» να είναι ομαλό διότι, ως προς ένα τουλάχιστον χαρακτηριστικό του, είναι ομαλό – (εδώ: όλα τα '[' αριστερά και όλα τα ']' δεξιά – ασχέτως πλήθους).
■

Παράδειγμα: Οι «πρώτοι» είναι μη-ομαλή γλώσσα.
Έστω το πολύ απλό αλφάβητο $\Sigma = \{\ \alpha\ \}$, με ένα μόνο σύμβολο. Σε αυτό είναι δυνατόν να παραστήσουμε αριθμούς, απλά επαναλαμβάνοντας το α τόσες φορές όσες μας λέει ο αριθμός αυτός, λ.χ. $\alpha^{(4)} = \alpha\alpha\alpha\alpha$ για το τέσσερα, $\alpha^{(7)} = \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha$ για το επτά, κτλ. Έστω λοιπόν το «λεξιλόγιο» των πρώτων αριθμών, δηλαδή η γλώσσα $L_{\text{ΠΡΩΤΟΙ}} = \{\ \alpha^{(p)}\colon p$ πρώτος αριθμός $\}$. Είναι η γλώσσα αυτή ομαλή; Με το λήμμα άντλησης είναι εύκολο να αποδείξουμε πως όχι: καθώς υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί το λήμμα άντλησης είναι εφαρμόσιμο, άρα η $L_{\text{ΠΡΩΤΟΙ}}$ περιέχει (μεταξύ άλλων) όλες τις λέξεις της μορφής (για κάθε $k \geq 0$, και για κάποιο $\nu_2 \geq 1$):

$$\underbrace{\alpha\alpha\ldots\alpha}_{\nu_1\ \text{φορές}}\underbrace{(\alpha\alpha\ldots\alpha\alpha)^k}_{\nu_2\ \text{φορές}}\underbrace{\alpha\ldots\alpha\alpha\alpha}_{\nu_3\ \text{φορές}}$$

Ο αριθμός p που παριστάνεται από αυτή την λέξη είναι το πλήθος των α αυτής της λέξης, δηλαδή ο $p = \nu_1 + k\,\nu_2 + \nu_3$. Δεν μπορεί όμως αυτός ο αριθμός να είναι πρώτος για όλα τα k, διότι για $k = (\nu_1 + \nu_3)$ έχουμε ήδη $p = (\nu_1 + \nu_3)(\nu_2 + 1)$, που δεν είναι πρώτος. (Πώς αντιμετωπίζουμε την περίπτωση $(\nu_1 + \nu_3) = 1$;) Από το άτοπο που προκύπτει έχουμε ότι η $L_{\text{ΠΡΩΤΟΙ}}$ είναι μη-ομαλή γλώσσα – τα αυτόματα δηλαδή δεν μπορούν να ανιχνεύσουν την ιδιότητα «πρώτος αριθμός» (με αυτό τον τρόπο, τουλάχιστον).
■

Παράδειγμα: τα αυτόματα και οι πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμός.
Μαθαίνουμε από μικροί να κάνουμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό. Οι πληροφορικάριοι μαθαίνουν τον ίδιο τρόπο, αυτή τη φορά όμως στο δυαδικό. Δίνουμε στην συνέχεια δύο παραδείγματα:



Αριστερά βλέπουμε την πρόσθεση των 17 και 5 στο δεκαδικό και δυαδικό σύστημα, και δεξιά τον πολλαπλασιασμό τους στο δεκαδικό και δυαδικό σύστημα. Σε μερικά πλαίσια έχουμε απλώς το μηδέν, ως πρόβλεψη χώρου για τυχόν «κρατούμενα». Τα «κρατούμενα» τα γράφουμε με κόκκινο χρώμα πάνω από κάθε στήλη. Μπορούμε να παραστήσουμε την άθροιση, (στο δυαδικό), με ένα αλφάβητο 8 συμβόλων, αφού έχουμε σε κάθε στήλη τρείς σειρές που φέρουν 0 ή 1.

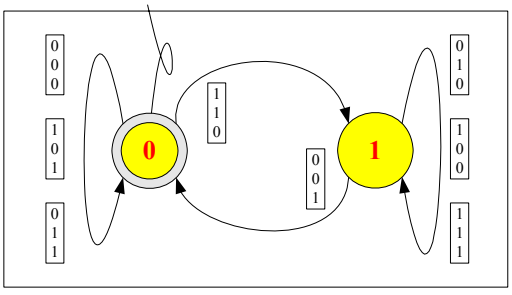
Θα γράφουμε αυτά τα σύμβολα ως $\Sigma = \{\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\}$, και η εικόνα του 17+5 (δυαδικά), αποδίδεται από την εξής λέξη:

$$\text{«17+5»}_{\Delta\text{ΥΑΔΙΚΟ}} \equiv \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε την γλώσσα L_+ των «σωστών προσθέσεων:

$$L_+ = \{\, \lambda : \lambda \in \Sigma^* \text{ και η } \lambda \text{ παριστά (όπως παραπάνω) μια σωστή πρόσθεση δυαδικών } \}.$$

Είναι η γλώσσα αυτή ομαλή; Είδαμε μια γραμματική που κάνει «πρόσθεση» στις πρώτες ενότητες αυτών των σημειώσεων (2η ενότητα). Αν παραστήσουμε την ύπαρξη ή όχι «κρατούμενου» ως δύο καταστάσεις «0» και «1» ενός αυτομάτου, τότε προκύπτει (κατ' αντιστοιχία) το εξής απλό διάγραμμα μεταβάσεων. Το διάγραμμα αυτό αναγνωρίζει μια σωστή πρόσθεση – διαβάζοντας αυτή από «δεξιά» προς το «αριστερά», όπως είναι η τηρουμένη σύμβαση· (η οποία δεν μας ενοχλεί αφού οι ομαλές γλώσσες είναι «κλειστές» ως προς τον κατοπρισμό.... – βλ. 7η ενότητα περί κλειστότητας). Η αρχική κατάσταση είναι «χωρίς κρατούμενο», όπως και η τελική (αλλιώς δεν έχουμε «ολόκληρο» το αποτέλεσμα).



Η μετάβαση, π.χ. $\langle 0, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, 1\rangle$ ερμηνεύεται ως εξής:

«με κρατούμενο 0, η πρόσθεση στη τρέχουσα στήλη των 1 και 1 (στη 1η και 2η γραμμή),
δίδει αποτέλεσμα στη στήλη αυτή 0 (στη 3η γραμμή), και κρατούμενο 1».

Θα λέγαμε λοιπόν μεταφορικά ότι τα αυτόματα «καταλαβαίνουν από πρόσθεση». Υπάρχει αυτόματο που να «καταλαβάινει» και τον πολλαπλασιασμό; Αν ορίσουμε την γλώσσα,

$$L_{\times} = \{\, \lambda : \lambda \in \Sigma^* \text{ και η } \lambda \text{ παριστά (όπως παραπάνω) έναν σωστό πολλαπλασιασμό δυαδικών } \}.$$

τότε είναι ομαλή αυτή η γλώσσα; Θα μπορούσαμε δηλαδή με αυτόματο να αναγνωρίσουμε λέξεις σαν αυτή του παραδείγματος που έχουμε δώσει:

$$\text{«}17\times5\text{»}_{\text{ΔΥΑΔΙΚΟ}} \equiv \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

Η απάντηση είναι «όχι» διότι κάποιοι πολλαπλασιασμοί παράγουν ένα φαινόμενο παρόμοιο με εκείνο της μη-ομαλής γλώσσας $\{\, x^{(\nu)}\, y\, x^{(\nu)} : \nu \geq 0 \,\}$. Οι πολλαπλασιασμοί αυτοί είναι όσοι έχουν την μορφή $1001 \times 101 = 101101$, $10001 \times 1001 = 10011001$ και γενικά $10^{(\kappa+1)}1 \times 10^{(\kappa)}1 = 10^{(\kappa)}110^{(\kappa)}1$, και οι οποίοι αντιστοιχούν στις λέξεις:

$$\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\text{—(κ φορές)—}\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\text{—(κ φορές)—}\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

Το ότι αυτές οι λέξεις απλώς περιέχονται στη γλώσσα των σωστών πολλαπλασιασμών δεν αρκεί, όπως σε προηγούμενο παράδειγμα, για να διαπιστώσουμε ότι αυτή είναι μη-ομαλή. «Πρέπει» να δείξουμε ότι αυτές αποτελούν την (δια)τομή της $L_{\times}$ με μια ομαλή γλώσσα. Και αυτό πράγματι είναι δυνατόν μέσω της γλώσσας,

$$\Lambda = \{\, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\text{—(i φορές)—}\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\text{—(j φορές)—}\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \text{ όπου } i, j \geq 0 \,\}$$

η οποία εύκολα διαπιστώνεται ότι είναι ομαλή, αφού τα i και j μεταβάλλονται ανεξάρτητα μεταξύ τους. Το αξιοσημείωτο εδώ είναι ότι μια λέξη της Λ αναπαριστά έναν σωστό πολλαπλασιασμό εάν και μόνον εάν $i = j = \kappa$. Αν εξετάσουμε λοιπόν την τομή $T = L_{\times} \cap \Lambda$, θα έχουμε:

$$T = \{\, \text{οι λέξεις της μορφής } \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\text{—(κ φορές)—}\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\text{—(κ φορές)—}\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \,\}$$

Με το λήμμα άντλησης προκύπτει, (κατά εντελώς παρόμοιο τρόπο με τα προηγούμενα παραδείγματα), ότι η γλώσσα Γ είναι μη-ομαλή, και αυτό δεν μπορεί να «οφείλεται» στην Λ (που είναι ομαλή), αλλά κατ' ανάγκην στην $L_{\times}$. Έπεται λοιπόν ότι η γλώσσα $L_{\times}$ των σωστών πολλαπλασιασμών δεν είναι ομαλή. Τα αυτόματα, δηλαδή, όχι μόνον δεν μπορούν να κάνουν πολλαπλασιασμό, αλλά ούτε κάν *να αναγνωρίσουν* έναν ήδη εκτελεσμένο σωστό πολλαπλασιασμό. (Μήπως γι' αυτό το λόγο οι μικρο-επεξεργαστές για να κάνουν πολλαπλασιασμό εκτελούν (μικρο)κώδικα;)

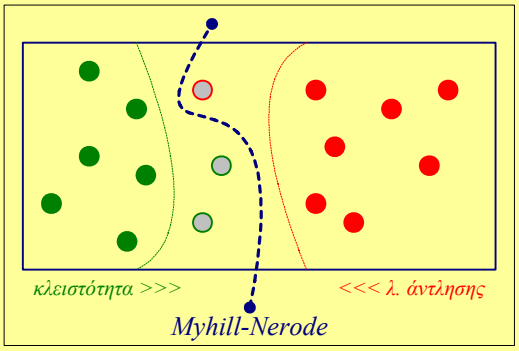
■

9ο Πεπερασμένα αυτόματα: ο χαρακτηρισμός των *Myhill-Nerode*.

Ακριβείς χαρακτηρισμοί και η αξία τους.

Δεν είναι εντελώς προφανές γιατί η γλώσσα λ.χ. των πολλαπλασίων του 6 είναι ομαλή γλώσσα, ενώ μια τόσο απλή, φαινομενικά, γλώσσα όσο η $\{ \alpha^{(\kappa)}\, \beta^{(\kappa)} : \kappa \geq 0 \}$ δεν είναι ομαλή: εκ πρώτης (και μόνον) όψεως τα αυτόματα φαίνεται να είναι σε θέση να κάνουν διαίρεση (δια 6, ή δια 3 κοκ), ενώ δεν είναι σε θέση να συγκρίνουν δύο αριθμούς, (εδώ, το πλήθος των α ώστε να αποφασίσουν εάν είναι ίσο με το πλήθος των β ή όχι).

Το επόμενο θεώρημα έρχεται να δώσει την οριστική απάντηση σε τέτοιου είδους απορίες, με τον εξής τρόπο: Ανακαλώντας το σχήμα της προηγούμενης ενότητας, το θεώρημα αυτής της ενότητας θα χαράξει την «οριστική» γραμμή στο σύνολο των γλωσσών επί ενός αλφαβήτου Σ, «αριστερά» της οποίας όλες οι γλώσσες θα είναι ομαλές, και «δεξιά» της οποίας όλες θα είναι μη-ομαλές.



Σχήμα: Ένας ακριβής χαρακτηρισμός των ομαλών γλωσσών.

Προφανώς ένας τέτοιος χαρακτηρισμός, με το να είναι απολύτως ακριβής, θα πρέπει να είναι σε θέση να «εξηγεί» το γιατί μια οποιαδήποτε γλώσσα είναι ή δεν είναι ομαλή.

Θεώρημα: ο χαρακτηρισμός *Myhill-Nerode* των ομαλών γλωσσών.
Ισχυρισμός: Έστω μια γλώσσα $L \subseteq \Sigma^*$ και έστω η εξής σχέση $\approx_L$ μεταξύ των λέξεων του Σ^* προσδιορισμένη με βάση την γλώσσα L: $(\lambda \approx_L \lambda') \Leftrightarrow (\forall \tau \in \Sigma^* (\lambda \tau \in L \Leftrightarrow \lambda' \tau \in L))$. Τότε

- Η σχέση $\approx_L$ είναι *σχέση ισοδυναμίας* επί των λέξεων του Σ^*.
- Η γλώσσα L αναγνωρίζεται από κάποιο αυτόματο *εάν και μόνο εάν* το πλήθος των κλάσεων ισοδυναμίας της $\approx_L$ είναι πεπερασμένο.

Ένα παράδειγμα κλάσης ισοδυναμίας λέξης ως προς γλώσσα Λ.

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη ας δώσουμε ένα παράδειγμα του τί είναι μια κλάση ισοδυναμίας ως προς την σχέση $\approx_L$ βρίσκοντας την κλάση ισοδυναμίας μιας λέξης ως προς κάποια γλώσσα Λ. Έστω η γλώσσα Λ επί του { α, β } που αποτελείται από όλες τις λέξεις *εκτός* από όλες όσες περιέχουν την λέξη αββββββ δηλαδη πάνω από 5 'β' μετά από ένα α. Ποιά είναι η κατά Myhill-Nerode κλάση ισοδυναμίας της λέξης μ = ββαββββ ως προς την Λ; Η απάντηση είναι:

S = «*όλες οι λέξεις της μορφής x αββββ όπου x μια οποιαδήποτε λέξη της Λ*».

Εξηγούμε στη συνέχεια τον λόγο και το σχετικό σκεπτικό. Έστω ότι συνεχίζουμε μια

λέξη της κλάσης S (δηλαδή μία με την μορφή χαβββ, x ∈ Λ), με το τελικό τμήμα τ. Εάν η λέξη x αβββ τ απορριφθεί θα έχει κάπου 5+ σύμβολα 'β'. Πού τα έχει; Λόγω της εμφάνισης του 'α' (που διακόπτει μια τέτοια αλληλουχία) οι πιθανές θέσεις μιας τέτοιας 5άδας+ (δηλαδή 6 και άνω 'β' στη σειρά) είναι οι εξής:

- εντός του x· αυτό αποκλείεται διότι η x είναι λέξη της γλώσσας Λ!
- εντός του αβββ τ (αν, λ.χ. τ = βββ...)· τότε όμως θα απορρίπτεται και η λέξη μ τ = ββαβββ τ.

Το ίδιο ισχύει και ανάποδα. Εάν η λέξη μ τ = ββαβββ τ απορρίπτεται τοτε θα έχει κάπου 5+ σύμβολα 'β'. Πού τα έχει; Λόγω της εμφάνισης του 'α' οι πιθανές θέσεις μιας τέτοιας 5άδας είναι οι εξής:

- εντός του ββ· αυτό αποκλείεται – δεν υπάρχουν.
- εντός του αβββ τ (αν, λ.χ. τ = βββ...) · τότε όμως θα απορρίπτεται και η λέξη xαβββ τ.

Επομένως για οποιαδήποτε συνέχεια τ, οι λέξεις χαβββτ και ββαβββτ έχουν κοινή μοίρα: η 1η απορρίπτεται αν και μόνον απορρίπτεται και η 2η – δηλαδή είναι «ισοδύναμες» ως προς την Λ. Διαπιστώσαμε λοιπόν ότι (λ ∈ S) ⇒ (λ ≈Λ μ) ⇒ (λ ∈ κλάση(μ)), ή ότι S ⊆ κλάση(μ).

Η κλάση S περιέχει όλες τις ισοδύναμες λέξεις με την μ, *ή μήπως υπάρχουν και άλλες;* Έστω μια λέξη λ' ∉ S, δηλαδή λέξη *με διαφορετική μορφή από την «x αβββ»*, *x ∈ Λ* – θα δείξουμε ότι λ' ∉ κλάση(μ). Οι λέξεις λ' ∉ S είναι των εξής ειδών:

- Η λ' δεν περιέχει 'α', δηλαδή είναι της μορφής β...ββ· τότε όμως για την συνέχιση τ = βββ η μεν λ' τ = β...βββββ γίνεται δεκτή (εξακολουθεί να μην περιέχει 'α'), ενώ η μ τ απορρίπτεται (έχει 5+ 'β' μετά το 'α') – άρα (λ ≠Λ μ).
- Η λ' περιέχει 'α', δηλαδή είναι της μορφής «χαβ(ν)», για ν ≥ 0· τότε όμως έχουμε δύο περιπτώσεις για το x:
  - Αν x ∉ Λ τότε επίση λ' ∉ Λ, και για την συνέχεια τ = ∅, ισχύει λ' τ = λ' ∉ Λ, ενώ μ τ = μ ∈ Λ – δηλαδή η λ' και μ δεν έχουν «κοινή μοίρα», άρα (λ ≠Λ μ).
  - Αν x ∈ Λ τότε ν ≠ 3, (αλλιώς θα είχαμε λ' ∈ S), και απομένουν δύο περιπτώσεις για το πλήθος των 'β':
    - Αν ν < 3 τότε για την συνέχεια τ = βββ η μεν λ' τ γίνεται δεκτή (≤ 5 'β' μετά το 'α'), ενώ η μ τ απορρίπτεται (6 'β' μετά το 'α') – άρα (λ ≠Λ μ).
    - Αν ν > 3 τότε για την συνέχεια τ = βββ η μεν λ' τ απορρίπτεται (5+ 'β' μετά το 'α'), ενώ η μ τ γίνεται δεκτή (≤ 5 'β' μετά το 'α') – άρα (λ ≠Λ μ).

Επομένως για λ' με διαφορετική μορφή από την λ' = χαβββ, x ∈ Λ, υπάρχει συνέχεια τ, για την οποία η μία των λέξεων λ' τ , μ τ απορρίπτεται ενώ η άλλη γίνεται δεκτή. Δηλαδή αν λ' ∉ S τότε (λ' ≠Λ μ), δηλαδή λ' ∉ κλάση(μ), ή κλάση(μ) ⊆ S, και συνολικά κλάση(μ) = S.

(Ας προσέξουμε στα προηγούμενα, το σχήμα της ανάλυσης:

- βρίσκουμε τις (υποψήφιες) ισοδύναμες λέξεις με την μ, και δείχνουμε το ότι «*η λτ είναι αποδεκτή εάν και μόνον εάν είναι αποδεκτή η μτ*», σχέση που ζητά η ισοδυναμία ως προς Λ.
- ελέγχουμε ότι αυτές οι υποψήφιες είναι οι *μόνες* ισοδύναμες με την μ, εντοπίζοντας στις ενάντιες περιπτώσεις λ' εκείνη την κατάλληλη συνέχεια τ που κάνει από τις λ'τ και μτ, την μία αποδεκτή και την άλλη απορριπτέα.)

Ας προχωρήσουμε λοιπόν στην ανάλυσή μας:

Σχέδιο απόδειξης: Αν η γλώσσα L γίνεται αποδεκτή από ένα αυτόματο, θα γίνεται δεκτή και από ένα *αιτιοκρατικό* αυτόματο A με καταστάσεις Σκ. Στα αιτιοκρατικά αυτόματα όμως κάθε λέξη λ οδηγεί το αυτόματο A σε *μία ακριβώς* συγκεκριμμένη κατάσταση την οποία θα συμβολίζουμε με Κ∧(λ). Δεν

περιμένουμε φυσικά κάθε λέξη να οδηγεί το αυτόματο σε διαφορετική κατάσταση – εξ άλλου αυτό για γλώσσες με αρκετά πολλές λέξεις ή με άπειρο πλήθος λέξεων αυτό είναι αδύνατον. Με βάση λοιπόν το αυτόματο ορίζεται μία σχέση ως των λέξεων του Σ*, η $\approx_A$ ως εξής::

$$(\lambda \approx_A \lambda') \Leftrightarrow \text{«οι } \lambda \text{ και } \lambda' \text{ οδηγούν το αυτόματο στην ίδια κατάσταση, ή } K_A(\lambda) = K_A(\lambda')\text{»}$$

Είναι σχεδόν τετριμμένο να ελέγξουμε ότι η σχέση $\approx_A$ είναι σχέσης ισοδυναμίας [7], όπως επίσης και η σχέση $\approx_L$. Αυτό που μας ενδιαφέρει εδώ είναι η σχέση των δύο σχέσεων. Εάν $\lambda \approx_A \lambda'$, δηλαδή $K_A(\lambda) = K_A(\lambda')$, τότε οι λέξεις λ και λ' οδηγούν το Α σε μία και την αυτή κατάσταση Κ. Επομένως όπως και εάν επεκτείνουμε αυτές τις λέξεις με ένα τελικό τμήμα $\tau \in \Sigma^*$, η διαδρομή τους *εφεξής* εντός του Α θα είναι η ίδια, (το Α είναι αιτιοκρατικό!) και επομένως είτε και οι δύο (λτ και λ'τ) θα καταλήξουν σε αποδεκτική κατάσταση, είτε και οι δύο σε απορριπτική, επομένως είναι ισοδύναμες και κατά την σχέση $\approx_L$.

$$(\lambda \approx_A \lambda') \Rightarrow (\lambda \approx_L \lambda')$$

Δύο λέξεις είναι ισοδύναμες εάν και μόνον εάν ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας, εδώ δηλαδή $(\lambda \approx_A \lambda') \Leftrightarrow (\lambda' \in \text{κλάση}_A(\lambda))$, και $(\lambda \approx_L \lambda') \Leftrightarrow (\lambda' \in \text{κλάση}_L(\lambda))$. Η παραπάνω σχέση λοιπόν γράφεται:

$$(\lambda' \in \text{κλάση}_A(\lambda)) \Rightarrow (\lambda' \in \text{κλάση}_L(\lambda)),\ \text{ή},\ \text{κλάση}_A(\lambda) \subseteq \text{κλάση}_L(\lambda)$$

Δηλαδή κάθε κλάση ισοδυναμίας της 1ης σχέσης $\approx_A$ *περιέχεται* σε κάποια κλάση ισοδυναμίας της 2ης, $\approx_L$. Αυτό όμως σημαίνει ότι:

$$\textit{πλήθος-κλάσεων}(\approx_A) \geq \textit{πλήθος-κλάσεων}(\approx_L)$$

Αλλά το πλήθος των κλάσεων ισοδυναμίας της σχέσης $\approx_A$ είναι, (σχεδόν εξ ορισμού), όσες και οι καταστάσεις του Α, δηλαδή: $\textit{πλήθος-κλάσεων}(\approx_A) = |\Sigma_K|$. Όλα αυτά μας δίδουν ότι:

$$\textit{πλήθος-κλάσεων}(\approx_L) \leq \textit{πλήθος-κλάσεων}(\approx_A) = |\Sigma_K| < \infty,$$

ότι δηλαδή το πλήθος των κλάσεων ισοδυναμίας της σχέσης $\approx_L$ είναι πεπερασμένο – και έχουμε το 50% του θεωρήματός μας.

Τί πληροφορία «θυμάται» ένα αυτόματο;

Η ιδέα πίσω από όλα αυτά είναι πως οτιδήποτε είναι δυνατόν να «θυμάται» ένα αυτόματο Α για κάποιο αρχικό τμήμα α μιας λέξης λ = α τ, το οποίο έχει διαβάσει μέχρι τώρα, δεν είναι δυνατόν να «αποτυπώνεται» παρά στην κατάσταση Κ, στην οποία η λέξη α το έχει οδηγήσει. Εάν λοιπόν η L περιέχει άπειρο πλήθος λέξεων για τις οποίες ανα δύο, λ και λ', υπάρχει «τέλος» τ, για το οποία η μεν λτ γίνεται αποδεκτή, η δεν λ'τ απορρίπτεται, τότε δεν είναι δυνατόν οι λ και λ' να οδηγούν το αυτόματο Α στην ίδια κατάσταση, διότι συνεχίζοντας με την τ το αυτόματο μέλλεται να σφάλει είτε για την λτ (εάν απορρίψει) είτε για την λ'τ (εάν αποδεχθεί). Μετά είτε την λ είτε την λ' το αυτόματο «θυμάται» πλέον την ίδια μία κατάσταση «πληροφορίας», ενώ επίκεινται δύο διαφορετικές απαντήσεις! Σε μια τέτοια περίπτωση, λοιπόν, το αυτόματο θα πρέπει να διαθέτει άπειρες καταστάσεις, και αυτό είναι αδύνατον.

Αντιστρόφως, εάν το πλήθος των κλάσεων ισοδυναμίας της σχέσης $\approx_L$ είναι πεπερασμένο τότε κάθε μία από αυτές μπορεί να αποτελέσει κατάσταση ενός αυτόματου. Μια τέτοια κατάσταση είναι να σαν σημαίνει: «*με όποιο τρόπο και αν έφθασες εδώ 'ξέχνα-τον' - η <u>συνέχεια</u> έχει σημασία*», διότι ασχέτως του

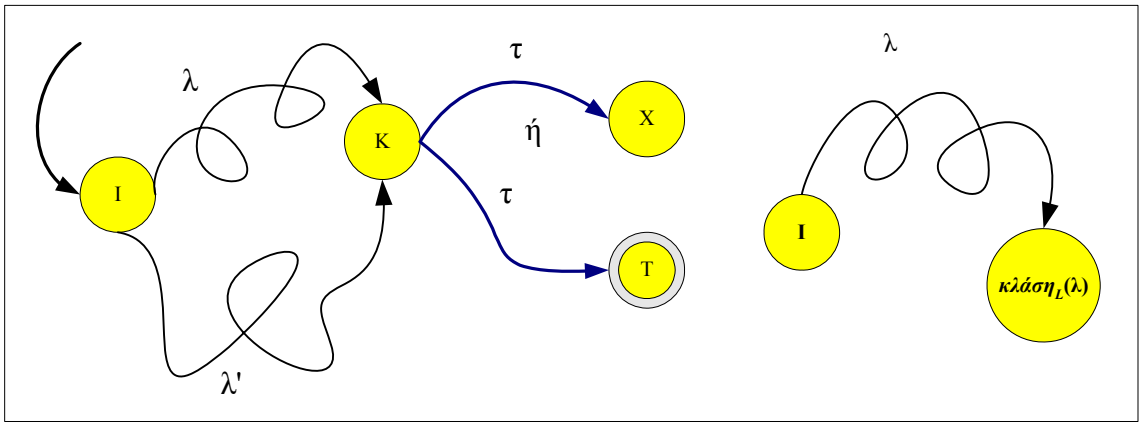
[7] Έχει δηλαδή τις ιδιότητες: ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.

αρχικού τμήματος της λέξης η οποιαδήποτε συνέχεια τ θα καθορίσει το εάν η λέξη θα γίνει αποδεκτή ή όχι – *αυτό ακριβώς απαιτεί ο ορισμός της σχέσης* $\approx_L$! Ορίζουμε, λοιπόν, για την L το εξής αυτόματο Α:

Σ	αλφάβητο	τα σύμβολα του αλφαβήτου Σ της γλώσσας L.
Σ_K	καταστάσεις	οι κλάσεις ισοδυναμίας της σχέσης $\approx_L$.
I	αρχική κατάσταση	η $κλάση_L(\varnothing)$: η κλάση της $\approx_L$ όπου ανήκει η κενή λέξη ∅.
T	αποδεκτικές καταστάσεις	οι κλάσεις των λέξεων της L: { $κλάση_L(λ)$: για $λ \in L$ } (ίσως > 1).
Δ	οδηγίες	$Δ(κλάση_L(λ), σ) = κλάση_L(λσ)$

Εξηγούμε την τελευταία γραμμή. Αν το αυτόματο βρίσκεται σε κάποια κλάση C ως προς την γλώσσα L, και βλέπει το σύμβολο σ, για να καθορίσει την επόμενη κατάσταση του διαλέγει μια λέξη λ από την C, και από την $C = κλάση_L(λ)$ μεταβαίνει στην $C' = κλάση_L(λσ)$. Η νέα κατάσταση μοιάζει να εξαρτάται από την επιλογή της λ, αλλά είναι εύκολο να δεί κάποιος ότι για όλα τα λ στη $κλάση_L(λ)$ αυτή η μετάβαση είναι προς την *ίδια* κλάση: Για οποιαδήποτε $λ' \in κλάση_L(λ)$ θα έχουμε $λ \approx_L λ'$, και για κάθε σύμβολο σ θα ισχύει επίσης ότι $λσ \approx_L λ'σ$, διότι μια επέκταση κατά τ των λέξεων λσ και λ'σ δεν είναι παρά μια επέκταση κατά σ τ των λ και λ', και άρα αφού οι λ και λ' έχουν την ίδια κατάληξη μέσω στ, οι λσ και λσ' θα έχουν την ίδια κατάληξη μέσω τ· δηλαδή $λσ \approx_L λ'σ$ και $κλάση_L(λσ) = κλάση_L(λ'σ)$ – η επιλογή της $λ \in C$, δεν παίζει ρόλο στο ποιά θα είναι η επόμενη κλάση/κατάσταση C'.

Επομένως από μία κατάσταση $κλάση_L(λ)$ μπορούμε, μέσω οποιουδήποτε συμβόλου σ, να μεταβούμε *σε μία και μοναδική επόμενη κατάσταση*, στην $κλάση_L(λσ)$. Η κατάσταση αυτή ουσιαστικά σημαίνει: «*έχω διαβάσει μέχρι τώρα λσ – ή κάτι ισοδύναμο*». Έχουμε λοιπόν ορίσει ένα αιτιοκρατικό αυτόματο Α. Γιατί όμως αποδέχεται *ακριβώς* τη γλώσσα L;



Σχήμα: Κάθε λέξη $λ \in Σ^*$ οδηγεί το Α στην κλάση-κατάσταση $κλάση_L(λ)$.

Ας προσέξουμε ότι κάθε λέξη $λ \in Σ^*$ οδηγεί το Α στην κατάσταση $κλάση_L(λ)$ – (πού αλλού;). Αυτό μπορούμε να αποδείξουμε επαγωγικά (επί του μήκους της λ):

- εάν $λ = \varnothing$ τότε η λ «οδηγεί» το Α στην αρχική κατάσταση που είναι εξ ορισμού η $κλάση_L(\varnothing)$.
- εάν $λ = α\,σ$, $α \in Σ^*$, $σ \in Σ$, τότε το πρώτο τμήμα α οδηγεί (από επαγωγική υπόθεση) το Α στην $κλάση(α)$, και από εκεί μέσω σ το οδηγεί εξ ορισμού στη κατάσταση $Δ(κλάση_L(α), σ) = κλάση_L(ασ)$.

Το αυτόματο Α αποδέχεται λοιπόν όλες και μόνον τις λέξεις της L για τους εξής δύο λόγους:

- Έστω ότι η λέξη $λ \in L$. Η λ οδηγεί το παραπάνω αυτόματο Α στην κατάσταση $κλάση_L(λ)$ που είναι εξ ορισμού αποδεκτική για το Α, επομένως το Α αποδέχεται την λ, δηλαδή $λ \in L(A)$, και $L \subseteq L(A)$.
- Έστω ότι το αυτόματο Α αποδέχεται την λέξη $λ \in L(A)$. Αυτό σημαίνει ότι η λ καταλήγει σε κλάση-κατάσταση που είναι αποδεκτική, δηλαδή είναι της μορφής $κλάση_L(λ')$ για κάποια λέξη $λ' \in L$. Αλλά, όπως είδαμε και πριν, μια λέξη *ανήκει στην κλάση-κατάσταση στην οποία αυτή οδηγεί το Α*, δηλαδή $λ \in κλάση_L(λ')$. Δύο λέξεις της ίδια κλάσης είναι όμως ισοδύναμες, δηλαδή είτε και οι δύο ανήκουν, είτε και οι δύο δεν ανήκουν στην L· και εδώ, αφού $λ' \in L$, συμπεραίνουμε ότι $λ \in L$. Επομένως $L(A) \subseteq L$ και συνολικά $L(A) = L$.

■

Το «μικρότερο» αυτόματο που αποδέχεται μια ομαλή γλώσσα!

Προσέξτε ότι το πλήθος των καταστάσεων του αυτομάτου αυτόματο του θ. *Myhill-Nerode* ισούται ακριβώς (εκ κατασκευής) με το *πλήθος των κλάσεων* της σχέσης $\approx_L$. Έχουμε όμως δείξει ότι για καθε αυτόματο Α με Σ_K καταστάσεις που αποδέχεται την γλώσσα L ισχύει ότι:

$$|\approx_L| \leq |\Sigma_K|$$

Τι «μας λέει» αυτή η σχέση; Ότι οποιοδήποτε αυτόματο αποδέχεται την γλώσσα L έχει πλήθος καταστάσεων μεγαλύτερο ή ίσο από εκείνο που μας παρέχει το θεώρημα Myhill-Nerode! Έχουμε λοιπόν ανακαλύψει την δομή του ελάχιστου (αιτιοκρατικού) αυτόματου το οποίο αποδέχεται μία δεδομένη ομαλή γλώσσα! Αυτό το θεώρημα απαντά λοιπόν – (στην ειδική βέβαια περιοχή των αυτομάτων) – ένα πρόβλημα της σχεδίασης αλγορίθμων σχεδόν απρόσιτο στην γενική του μορφή:

«ποιός είναι ο «μικρότερος» αλγόριθμος ή πρόγραμμα ή μηχανή (πείτε όπως θέλετε...) που επιλύει ένα δεδομένο πρόβλημα;»

Μια δεύτερη ματιά σε δύο ήδη γνωστά παραδείγματα:
...γιατί η «διαιρετότητα δια ν=3» αντιστοιχεί σε ομαλή γλώσσα:
Έστω δύο λέξεις του {0, 1} με τα λ και λ' ως «αρχικά τμήματα» και ένα «τελικό τμήμα», τ. Γράφοντας (εδώ) με λ την *λέξη* και με [λ] τον *αριθμό* που περιγράφει (δυαδικά), έχουμε:

$$[\lambda\,\tau] = 2^{|\tau|}\,[\lambda] + [\tau], \quad \text{και,} \quad [\lambda'\,\tau] = 2^{|\tau|}\,[\lambda'] + [\tau]$$ [8]

Εάν $[\lambda] = 3q + r$ και $[\lambda'] = 3q' + r'$, τότε:

$$[\lambda\tau] = 2^{|\tau|}\,[\,3q + r\,] + [\tau], \text{ και } [\lambda'\,\tau] = 2^{|\tau|}\,[3q' + r'\,] + [\tau]$$

το οποίο μας δίνει:

$$[\lambda\tau] \mod 3 = (\,2^{|\tau|}\,r + [\tau]\,) \mod 3$$
$$[\lambda'\tau] \mod 3 = (\,2^{|\tau|}\,r' + [\tau]\,) \mod 3$$

Εάν λοιπόν οι λ και λ' δίνουν το ίδιο υπόλοιπο r = r', ως προς 3, τότε ανεξαρτήτως ενός κοινού τελικού τμήματος τ οι λέξεις/αριθμοί λτ και λ'τ θα έχουν *επίσης το ίδιο υπόλοιπο*, δηλαδή είτε θα διαιρούνται και οι δύο δια 3 είτε δεν θα διαιρείται καμμία από τις δύο δια 3. Εάν δυό λέξεις λοιπόν είναι, ως αριθμοί, ισοϋπόλοιπες ως προς 3 τότε είναι ισοδύναμες ως προς την L_{3_x}. Η L_{3_x} έχει επομένως τόσες κλάσεις ισοδυναμίας όσα είναι τα δυνατά υπόλοιπα ως προς 3, δηλαδή μόνον τρείς (υπόλοιπα 0,1,2), και κατά το θεώρημα Myhill-Nerode, είναι ομαλή γλώσσα! (Η παραπάνω απόδειξη αυτή μάλιστα γενικεύεται για οποιοδήποτε k (τα δυνατά υπόλοιπα είναι 0 1 2… k–1) και φυσικά όχι μόνον για το δυαδικό αλφάβητο.)

…και γιατί τελικά η γλώσσα $L_? = \{\, \alpha^{(\kappa)}\,\beta^{(\kappa)}: \kappa \geq 0 \,\}$ δεν είναι ομαλή γλώσσα:
Προσέξτε ότι εάν i ≠ j τότε οι λέξεις $\alpha^{(i)}$ και $\alpha^{(j)}$ δεν είναι ισοδύναμες κατά την σχέση $\approx_{L?}$, διότι για την τελική συνέχεια $\tau = \beta^{(i)}$ η λέξη $\alpha^{(i)}\tau = \alpha^{(i)}\beta^{(i)}$ ανήκει στην $L_?$, ενώ η λέξη $\alpha^{(j)}\tau = \alpha^{(j)}\beta^{(i)}$ δεν ανήκει, (αφού i ≠ j). Κάθε λέξη $\alpha^{(i)}$, i ≥ 0, ανήκει λοιπόν σε μια ξεχωριστή κλάση, επομένως οι κλάσεις ισοδυναμίας της σχέσης $\approx_{L?}$ είναι απείρου πλήθους, και άρα, τελικά η γλώσσα $L_?$ είναι μια μη-ομαλή γλώσσα.

■

[8] Το τελικό τμήμα τ «σπρώχνει» το τμήμα λ κατά μήκος(τ) = |τ| δυαδικά ψηφία προς αριστερά, επομένως πολλαπλασιάζει τον αριθμό [λ] επί $2^{|\tau|}$.

10ο Πεπερασμένα αυτόματα: τα θεωρήματα «διαγνωσιμότητας».

Ποιές πληροφορίες είναι εξαγώγιμες από ένα αυτόματο;

Είδαμε ότι τα πεπερασμένα αυτόματα (και οι ισοδύναμες τεχνικές), μας επιτρέπουν να προσδιορίζουμε μια γλώσσα, δηλαδή ένα σύνολο λέξεων που περιγράφουν «αντικείμενα» με μια κοινή ιδιότητα. Πόσο «διαφανής» είναι ένας τέτοιος ορισμός; Διότι αν κατέχουμε μέσω ενός αυτομάτου Α τον πλήρη ορισμό μιας γλώσσας L(A), η αξία αυτού του ορισμού πραγματώνεται όταν μέσω αυτού ερχόμαστε σε θέση να «βλέπουμε» και να διαπιστώνουμε κάποιες ιδιότητες για την γλώσσα αυτή. Υπάρχουν μερικά γενικότατες θεμελιακές ιδιότητες, που θα θέλαμε να είμαστε σε θέση να διαπιστώνουμε για μία L, ή δύο γλώσσες L_1, L_2, λ.χ.:

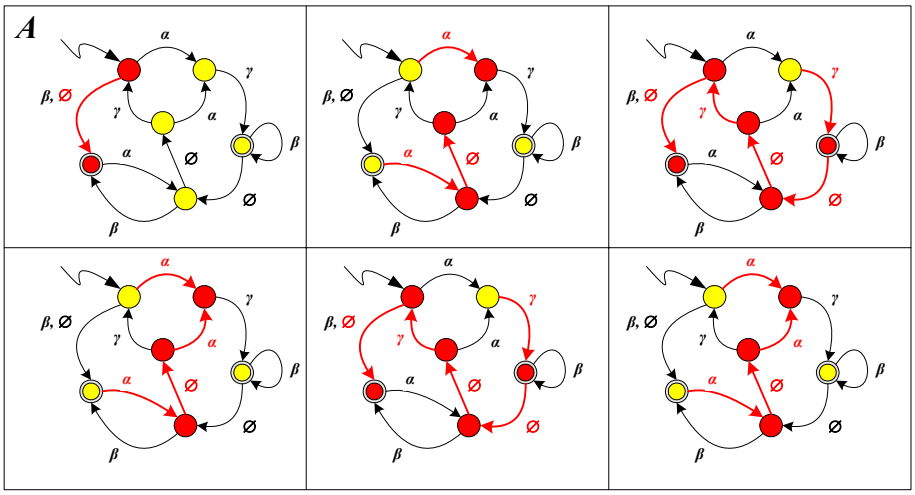
- Είναι $L = \varnothing$;
- Είναι $L_1 = L_2$;

Σε αυτή την σύντομη ενότητα θα δείξουμε ότι ορισμένα θεμελιακά ζητήματα περί γλωσσών, είναι όντως ανιχνεύσιμα εάν αυτές ορίζονται μέσω αυτομάτων.

Θεώρημα: συσχέτιση ομαλών γλωσσών μέσω των αντιστοίχων αυτομάτων.
Ισχυρισμός: Δεδομένων αυτομάτων Α, A_1 και A_2, υπάρχει «αλγοριθμικός» τρόπος διάγνωσης των εξής:

1. εάν μια λέξη $\lambda \in \Sigma^*$, ανήκει στην γλώσσα L(A) ή όχι.
2. εάν το Α απορρίπτει πάντοτε, εάν δηλαδή $L(A) = \varnothing$.
3. εάν το Α αποδέχεται πάντοτε, εάν δηλαδή $L(A) = \Sigma^*$.
4. εάν το A_1 αποδεχεται ειδικώτερη γλώσσα από το A_2: $L(A_1) \subseteq L(A_2)$.
5. εάν το A_1 αποδεχεται την ακριβώς την ίδια γλώσσα με το A_2: $L(A_1) = L(A_2)$.

Σχέδιο απόδειξης:



Σχήμα: Η ανίχνευση της αποδοχής μιας λέξης $\lambda = \boldsymbol{\alpha\gamma\alpha\beta\alpha}$, σε (μη-αιτιοκρατικό) αυτόματο ***A***.

1. Αν το αυτόματο Α είναι αιτιοκρατικό τότε όλα είναι εύκολα «εξ ορισμού»: εκτελούμε τις οδηγίες του ισοδύναμου αιτιοκρατικού αυτόματου και αποφασίζουμε με βάσει το εάν η τελική του κατάσταση είναι αποδεκτή ή όχι. Αλλά ακόμα και εάν το Α είναι μη αιτιοκρατικό, μπορούμε να «εξομοιώσουμε» το αντίστοιχο αιτιοκρατικό χωρίς πρώτα να το κατασκευάσουμε, αρκεί οι μεταβάσεις του να είναι απλές (δηλαδή να είναι κενές (∅) ή να προκαλούνται ένα μόνον σύμβολο:
   - Διατηρούμε ένα σύνολο καταστάσεων $S \subseteq \Sigma_K$, ως την «κατάσταση» στην οποία βρισκόμαστε.
   - Η αρχική «κατάσταση» είναι η αρχικη I *μαζί* με όλες τις καταστάσεις που είναι προσιτές από αυτήν μέσω κενών μεταβάσεων.

- Για κάθε «κατάσταση» S και για ένα-ένα τα σύμβολα σ = λ[κ], κ = 1, ...,|λ|, της λέξης λ, κατασκευάζουμε το σύνολο των καταστάσεων S' στις οποίες μεταβαίνουμε από οποιαδήποτε κατάσταση του S μέσω του συμβόλου σ. Συμπληρώνουμε την «κατάσταση» S' με όλες τις καταστάσεις του Σ_K που είναι προσιτές από αυτήν μέσω κενων μεταβάσεων. Το σύνολο S' γίνεται η νέα «κατάσταση» S.
- Ελέγχουμε εάν το σύνολο-«κατάσταση» S περιέχει έστω μία αποδεκτική κατάσταση του T.

Στο προηγούμενο σχήμα εικονίζεται ένα παράδειγμα για την προτεινόμενη διαδικασία. Οι κόμβοι της εκάστοτε «κατάστασης» S σημειώνονται με ερυθρό χρώμα. Οι μεταβάσεις με ερυθρές επιγραφές (είτε κενές, είτε μέσω ενός συμβόλου), υποδεικνύουν τον λόγο και τρόπο σχηματισμού της επόμενης «κατάστασης» S'. Όπως φαίνεται στο σχήμα, το αυτόματο A απορρίπτει την λέξη ***αγαβα***: η λέξη αυτή δεν το οδηγεί σε καμμία αποδεκτική κατάσταση.

Ακολουθεί ο σχετικός «ψευδοκώδικας». Σημειώνουμε εδώ ότι ο κώδικας αυτός χρειάζεται μια πλήρη υπολογιστική συσκευή (του Η/Υ που κατασκευάζουμε) για να εκτελεστεί – ο «ίδιος» δηλαδή *δεν* αποτελεί αυτόματο, αλλά αποτελεί *εξομοίωση* ενός αυτομάτου, μέσω μιας πιο ισχυρή υπολογιστικής συσκευής. Με αυτή την «μέθοδο» δεν αντιμετωπίζουμε τα αυτόματα πια ως *συσκευές* («*hardware*»), αλλά ως ένα βολικό *τρόπο προγραμματισμού*, («*software*»).

Αλγόριθμος: «Διάγνωση λέξης μέσω αυτομάτου».

```
Συνάρτηση Διάγνωση( A: αυτόματο, λ: λέξη): ΝΑΙ/ΟΧΙ        // λ∈L(A) ή λ∉L(A)

Σ(A) : το αλφάβητο του A
Σ_K(A) : οι καταστάσεις του A
I(A) : η αρχική κατάσταση του A
T(A) : οι αποδεκτικές καταστάσεις του A
Δ(A) : οι μεταβάσεις του A
S,S' ⊆ Σ_K(A), σ∈Σ(A)

Συνάρτηση Απλές-μεταβάσεις(S,σ,S')
{ S' ← ∅
  Για K∈S και (K,σ,K')∈Δ(A) { S' ← S'+ K }
  S  ← S' }

Συνάρτηση Κενές-μεταβάσεις(S')
{ Επαναλαμβάνουμε
    OK ← ΑΛΗΘΕΣ
    Για K∈S', Για (K,∅,K')∈Δ(A)
      Εάν K'∉ S' τότε { S' ← S'+K', OK ← ΨΕΥΔΕΣ } }
  έως-ότου OK
}

{ S ← I(A)
  Κενές-Μεταβάσεις(S)
  Για κ = 1 έως μήκος(λ) { Απλές-Μεταβάσεις(S,λ[κ],S')
                           Κενές-Μεταβάσεις(S')
                           S ← S' }
  Διάγνωση ← ((S∩T(A))≠∅)
}
```

Να θυμηθούμε σε αυτό το σημείο ότι η κενή γλώσσα δεν περιέχει *καμμία* λέξη – ούτε την κενή λέξη ∅ (με μηδέν σύμβολα). Αντιθέτως η γλώσσα { ∅ } δεν είναι κενή – έχει μία λέξη (έστω την κενή...).

2. Η διάγνωση του εάν L(A) = ∅ ή όχι, φαίνεται να αποτελεί δύσκολο πρόβλημα διότι καλούμαστε να διαπιστώσουμε ότι κάθε περίπατος στο αυτόματο A οδηγεί σε απορριπτική κατάσταση, την στιγμή που οι δυνατοί περίπατοι ίσως να έχουν άπειρο πλήθος: οι καταστασεις είναι μεν πεπερασμένες αλλά εάν υφίστανται «κύκλοι»στο αυτόματο, αυτοί μπορούν να διανυθούν οσεσδήποτε φορές. Οι

κύκλοι όμως δεν προσφέρουν τίποτε στην προσιτότητα από την αρχική κατάσταση μιας αποδεκτικής κατάστασης, και επομένως η εξέτασή τους μπορεί να παραληφθεί. Αρκεί δηλαδή να ελέγξουμε εάν υπάρχει έστω μία *απλή διαδρομή* (= *περίπατος χωρίς κύκλους*) από την αρχική κατάσταση σε κάποια αποδεκτική κατάσταση του Τ. Εάν βρούμε έστω μία τότε $L(A) \neq \varnothing$, αλλιώς $L(A) = \varnothing$. Αμέσως παρακάτω δίδεται ο σχετικός «ψευδοκώδικας».

Αλγόριθμος: «Διάγνωση τετριμμένου αυτομάτου», L(A) = ?? ∅.

```
Συνάρτηση ΚενήΓλώσσα(A: αυτόματο): ΝΑΙ/ΟΧΙ

Σ(A)  : το αλφάβητο του A
Σ_K(A) : οι καταστάσεις του A
I(A)  : η αρχική κατάσταση του A
T(A)  : οι αποδεκτικές καταστάσεις του A
Δ(A)  : οι μεταβάσεις του A
S,S' ⊆ Σ_K(A), σ∈Σ(A)

Συνάρτηση Μεταβάσεις(S)
{ Επαναλαμβάνουμε
    ΟΚ ← ΑΛΗΘΕΣ
    Για Κ∈S, Για (Κ,λ,Κ')∈Δ(A)                  // για οποιαδήποτε λ∈Σ(A)*
      Εάν Κ∉S τότε { S ← S+Κ, ΟΚ ← ΨΕΥΔΕΣ } }
  έως-ότου ΟΚ
}

{ S ← I(A)
  Μεταβάσεις(S)
  ΚενήΓλώσσα ← ((S∩T(A))=∅)
}
```

3. Η διάγνωση του εάν $L(A) = \Sigma^*$ ή όχι, δεν αποτελεί πρόβλημα συμμετρικό εκ πρώτης όψεως με το προηγούμενο. Εδώ καλούμαστε να ελέγξουμε εάν όλες οι δυνατές λέξεις του αλφάβητου Σ οδηγούν το αυτόματο Α σε αποδεκτική κατάσταση, και όλες οι λέξεις έχουν άπειρο πλήθος χωρίς να φαίνεται ποιές από αυτές θα μπορούσαμε να αποκλείσουμε από την εξέταση... Πλην όμως, η διάγνωση $L(A) = \Sigma^*$ ισοδυναμεί με την διάγνωση $\Sigma^* - L(A) = \varnothing$, και επειδή η L(A) είναι ομαλή, το ίδιο είναι και η συμπληρωματική της, και μάλιστα μπορούμε να *κατασκευάσουμε* κάποιο αυτόματο Α′ που αναγνωρίζει την συμπληρωματική γλώσσα: $L(A') = (\Sigma^* - L(A))$, (βλ. σχετική ενότητα περί κλειστότητας). Αρκεί λοιπόν να εξετάσουμε εάν $L(A') = \varnothing$ ή όχι.

4. Από την συνολοθεωρία γνωρίζουμε ότι η σχέση $(X \subseteq Y)$ ισχύει εάν και μόνον εάν $(X - Y) = \varnothing$. Αφού οι γλώσσες $L(A_1)$ και $L(A_2)$ προέρχονται από τα αυτόματα A_1 και A_2, υπάρχει (και έχουμε δείξει πως κατασκευάζεται) ένα αυτόματο $A^{(-)}$ που αποδέχεται την διαφορά τους: $L(A^{(-)}) = L(A_1) - L(A_2)$. Αρκεί λοιπόν να ελέγξουμε εάν $L(A^{(-)}) = \varnothing$ ή όχι.

5. Ελέγχουμε εάν $L(A_1) \subseteq L(A_2)$ *και* $L(A_2) \subseteq L(A_1)$.

■

11ο Πεπερασμένα αυτόματα και «ομαλές (γλωσσικές) εκφράσεις».

Ομαλές εκφράσεις:
Είναι δυνατόν να δώσουμε έναν ακόμα εξυπηρετικό και ενδιαφέροντα τρόπο να παράγουμε γλώσσες – μέσω ενός τύπου εκφράσεων που θα ονομάσουμε «ομαλές». Μέσω αυτών θα λάβουμε τελικά άλλον ένα πολύ ενδιαφέροντα χαρακτηρισμό των ομαλών γλωσσών. Ο ορισμός των ομαλών εκφράσεων είναι επαγωγικός και ακολουθεί:

- Για κάθε λέξη $\lambda \in \Sigma^*$, η $R' = \lambda$ θεωρείται ως ομαλή έκφραση.
- Εάν τα R, R_k, k = 1, …, ν είναι ομαλές εκφράσεις τότε και οι εξής εκφράσεις θεωρούνται ομαλές:
  - $R' = R_1 R_2 R_\nu$ («παράθεση»)
  - $R' = \{ R_1, R_2, \ldots, R_\nu \}$ («ένωση»)
  - $R' = R^*$ («αόριστη επανάληψη»)
  - $R' = (R)$ («παρενθέσεις» για την αποφυγή συγχύσεων)

Η ιδέα είναι να κάνουμε κάθε ομαλή έκφραση R χρήσιμη για τον ορισμό μιας γλώσσα, της L(R), η οποία ορίζεται επίσης επαγωγικά (κατ' ανάγκη..., αντίστοιχα με την δομή της έκφρασης R) :

Βάση επαγωγής:
Εάν $R' = \lambda$, για $\lambda \in \Sigma^*$ τότε $L(R) = \{ \lambda \}$.

Βήμα επαγωγής:
Εάν $R' = R_1 R_2 \ldots R_\nu$ τότε $L(R') = L(R_1) \,||\, L(R_2) \,||\, \ldots \,||\, L(R_\nu)$
Εάν $R' = \{ R_1, R_2, \ldots, R_\nu \}$ τότε $L(R') = L(R_1) \cup L(R_2) \cup \ldots \cup L(R_\nu)$
Εάν $R' = R^*$ τότε $L(R') = L(R)^*$
Εάν $R' = (R)$ τότε $L(R') = L(R)$

Παραδείγματα: μερικές ομαλές (κανονικές) εκφράσεις.
(1) επί του $\Sigma = \{\alpha,\beta,\gamma\}$ οι εξής εκφράσεις θεωρούνται ομαλές:
$\{ \alpha\beta,\ \beta\alpha,\ \beta\gamma\gamma \}$
$\{ \alpha\beta, \varnothing \} (\{ \alpha\beta,\ \alpha\beta^*\gamma \})^* \{ \alpha, \gamma \}$
$(\{ \alpha, \gamma\beta \}^* \,||\, \beta)^*$

(2) επί του $\Sigma = \{ +, -, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, E, . \}$ οι εξής ομαλές εκφράσεις μας δίδουν την γλώσσα των αριθμών γραμμένων κατά την «επιστημονική» γραφή (λ.χ. +3141592654E–9, 0.789654E38, κττ):

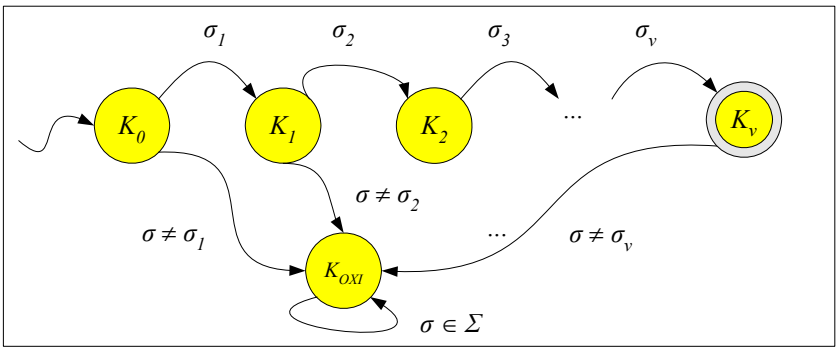
$R_{<\text{πρόσημο}>} = \{ +, -, \varnothing \}$
$R_{<\text{ψηφίο}>} = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$
$R_{<\text{φυσικός}>} = R_{<\text{ψηφίο}>} R_{<\text{ψηφίο}>}^* = R^+_{<\psi\eta\phi\acute{\iota}o>}$ [9]
$R_{<\text{εκθέτης}>} = \{ E \} R_{<\text{πρόσημο}>} R_{<\text{φυσικός}>}$
$\mathbf{R_{<\text{αριθμός}>}} = R_{<\text{πρόσημο}>} R_{<\text{φυσικός}>} \{ . \} R_{<\text{φυσικός}>} R_{<\text{εκθέτης}>}$

Ο χαρακτηρισμός των ομαλών γλωσσών μέσω ομαλών εκφράσεων δίδεται από το εξής θεώρημα:

Θεώρημα: ισοδυναμία ομαλών εκφράσεων και πεπερασμένων αυτομάτων
Ισχυρισμός: Για κάθε ομαλή έκφραση R' υπάρχει ένα αυτόματο A το οποίο αναγνωρίζει την ίδια γλώσσα, δηλαδή L(A) = L(R') και αντιστρόφως.

[9] Η *συντομογραφία* $\mathbf{R^+ = R\,R^*}$, χρησιμοποιείται αρκετά συχνά, για να δηλώσει την επανάληψη της γλώσσας L(R) *μία* ή περισσότερες φορές, (και όχι μηδέν ή περισσότερες φορές).

Σχέδιο απόδειξης: Η πρώτη κατεύθυνση μπορεί να αποδειχθεί αρκετά εύκολα, επαγωγικά, με χρήση των θεωρημάτων κλειστότητας.
Βάση επαγωγής: Εάν R′ = λ τότε το αυτόματο Α που αποδέχεται ακριβώς και μόνον την λ κατασκευάζεται κατά άμεσο και προφανή τρόπο:



Σχήμα: Το (αιτιοκρατικό) αυτόματο που αποδέχεται την λέξη λ = σ1 σ2 … σv .

Βήμα επαγωγής: εξετάζουμε τους 4 τρόπους κατασκευής μιας σύνθετης ομαλής έκφρασης.

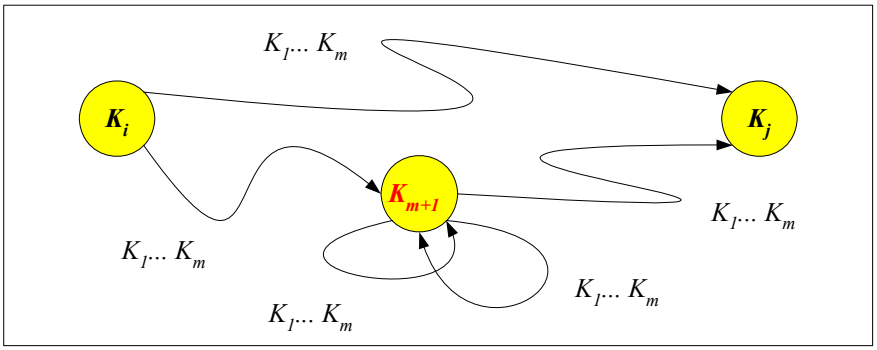
- Εάν R′ = R1 R2 Rv έχουμε (από επαγωγική υπόθεση) ότι κάποια αυτόματα A1, A2, …, Av αναγνωρίζουν τις γλώσσες L(R1), L(R2), ..., L(Rv). Το αυτόματο που αναγνωρίζει την L(R′) είναι το αυτόματο που αναγνωρίζει την παράθεση των γλωσσών L(Rκ), (βλ. θ. κλειστότητας).
- Εάν R′ = {R1, R2, ..., Rv } έχουμε (επαγωγικά) ότι κάποια αυτόματα A1, A2, …, Av αναγνωρίζουν τις L(R1), L(R2), ..., L(Rv). Το αυτόματο που αναγνωρίζει την L(R′) είναι το αυτόματο που αναγνωρίζει την ένωση των γλωσσών L(Rκ), (βλ. θ. κλειστότητας).
- Εάν R′ = R* έχουμε (επαγωγικά) ότι κάποιο A′ αναγνωρίζει την γλώσσα L(R). Το αυτόματο που αναγνωρίζει την γλώσσα L(R′) είναι το αυτόματο που αναγνωρίζει την αόριστη επανάληψη L(R)*, (βλ. θ. κλειστότητας).
- Εάν R′ = (R) τότε L(R′) = L(R), και το αυτόματο που αναγνωρίζει την 2η αναγνωρίζει και την 1η.

Για την απόδειξη της αντίστροφης κατεύθυνσης χρειάζεται κάτι πιο δραστικό: πρέπει να δείξουμε ουσιαστικά ότι *όλες ακριβώς οι περίπατοι από την αφετηριακή κατάσταση ενός αυτομάτου Α έως κάποια αποδεκτική περιγράφονται από κάποια ομαλή έκφραση*. Προς τούτο θεωρούμε το πώς μπορούμε να ορίσουμε σταδιακά και επαγωγικά το σύνολο όλων αυτών των περιπάτων. Έστω Ki, i = 1, ..., n οι καταστάσεις του αυτομάτου Α. Ορίζουμε τις εξής γλώσσες, για i, j = 1, ..., n:

$\Lambda_m[K_i, K_j]$ = { όλες οι λέξεις-περίπατοι από την κατάσταση Ki έως και την Kj
που περνούν από κάποιες από τις καταστάσεις K1 έως Km, και μόνον }

Για m = 0 έχουμε μόνον τις *κατευθείαν* διαδρομές, επομένως για i, j = 1, ..., n, ισχύει το εξής:

$\Lambda_0[K_i, K_j]$ = { λ : για όσες λέξεις λ υπάρχει κατ' ευθείαν μετάβαση $K_i \xrightarrow{\lambda} K_j$ }



Σχήμα: Δύο επιλογές: η Km+1 κατάσταση χρησιμοποιείται (≥ 1 φορές) – ή όχι.

Για k = m+1 θα εκφράσουμε τα $\Lambda_{m+1}[-, -]$ μέσου των $\Lambda_m[K_i, K_j]$ (για i, j = 1, ..., n): ένας περίπατος από την κατάσταση K_i έως και την K_j είτε χρησιμοποιεί την κατάσταση K_{m+1} είτε όχι. Και εάν την χρησιμοποιεί, μία ή περισσότερες φορές, τότε *ενδιαμέσως*, (ανάμεσα δηλαδή σε δύο *διαδοχικές* εμφανίσεις της K_{m+1}), θα περνά, φυσικά, μόνον από τις καταστάσεις K_1 έως K_m. Επομένως όλες και μόνον οι λέξεις-περίπατοι από την από K_i στην K_j που περνούν μόνον από (κάποιες από) τις καταστάσεις 1...m+1 περιγράφονται ως εξής για i, j = 1, ..., n:

$$\Lambda_{m+1}[K_i, K_j] = \{ \mathbf{\Lambda_m[}K_i, K_{m+1}\mathbf{]}\ \mathbf{\Lambda_m[}K_{m+1}, K_{m+1}\mathbf{]^*}\ \mathbf{\Lambda_m[}K_{m+1}, K_j\mathbf{]}\ ,\quad \mathbf{\Lambda_m[}K_i, K_j\mathbf{]}\ \}$$

(Ας προσέξουμε στην παραπάνω έκφραση (και) τα τρία στοιχεία των ομαλών εκφράσεων: την παράθεση, την αόριστη επανάληψη, και την ένωση.)

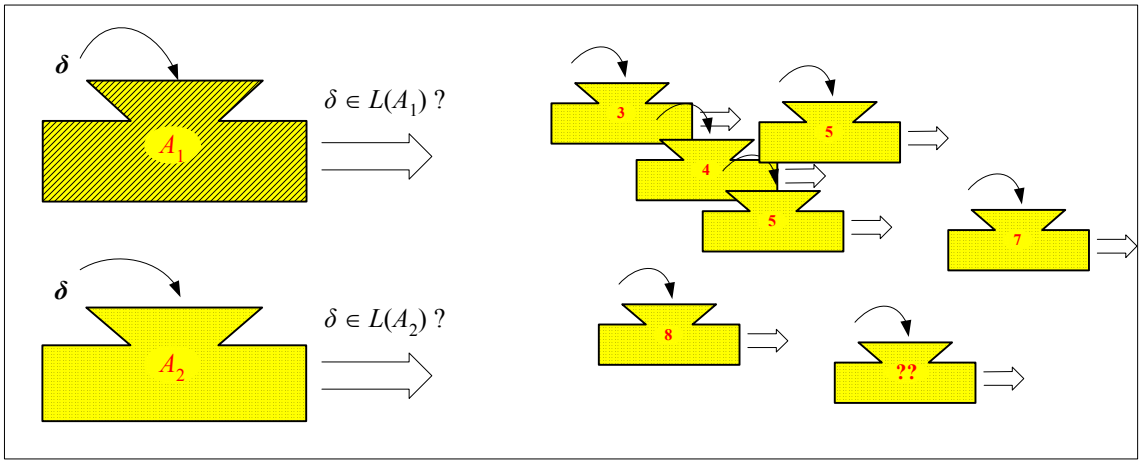
Η γλώσσα του αυτομάτου A προκύπτει από όλους και μόνον τους περιπάτους που αρχίζουν από την αφετηριακή κατάσταση I, καταλήγουν σε κάποια τερματική κατάσταση T_j (για j = 1, 2, ..., ν, ν = |T|), και ενδιαμέσως επιτρέπεται να περνούν από *οποιαδήποτε* κατάσταση, δηλαδή από τις K_i, i = 1, ..., m, για $m = n$. Επομένως η έκφραση:

$$R = \{ \Lambda_n[I, T_1],\ \Lambda_n[I, T_2],\ ...,\ \Lambda_n[I, T_\nu]\ \}$$

περιγράφει όλους και μόνον τους αποδεκτικούς περιπάτους στο A. Παρατηρούμε στα παραπάνω ότι οι εκφράσεις $\Lambda_m[K_i, K_j]$) (για m = 0, και για m = 1, 2, ..., n) είναι όλες ομαλές εκφράσεις, επομένως ομαλή είναι και η τελική έκφραση R που περιγράφει την γλώσσα του αυτομάτου A: L(A) = L(R).

■

12ο Πεπερασμένα αυτόματα: υπάρχει «καθολικό» αυτόματο;



Τα αυτόματα και μια εισαγωγή στον κόσμο του προγραμματισμού.

Είχαμε στις προηγούμενες ενότητες μια εισαγωγή στον κόσμο των αυτομάτων. Πρόκειται για υπολογιστικές συσκευές, του γραμματικο-συντακτικού τρόπου, συσκευές που είναι μεν απλές, όχι όμως και τετριμμένες.

Κάθε αυτόματο είναι ***υλοποιήσιμο***· ακριβέστερα, για κάθε αυτόματο, η αιτιοκρατική του παραλλαγή (που υπάρχει πάντοτε), είναι ***φυσικώς*** υλοποιήσιμη: Για ένα αυτόματο A_1 μπορούμε να φτιάξουμε μια συσκευή που αν δεχθεί μια λέξη δ ως δεδομένο θα μας απαντήσει εάν αυτή ανήκει ή όχι στη γλώσσα $L(A_1)$. Ας προσέξουμε όμως εδώ ότι για ένα άλλο αυτόματο A_2 θα χρειαστεί να κατασκευάσουμε μια άλλη, νέα, συσκευή για την αναγνώριση της αντίστοιχης γλώσσας $L(A_2)$ – (βλ. στο σχήμα τις «μηχανές» A_1 και A_2). Και το ίδιο για μια άλλη 3η, 4η, 5η, κοκ, γλώσσα...

Υπάρχει όμως μια άπειρη ποικιλία αυτομάτων ικανών να αναγνωρίσουν μια αντιστοίχως άπειρη ποικιλία γλωσσών, και επομένως «τεχνολογικά» θα πρέπει να είμαστε σε θέση να κατασκευάζουμε, να διαθέτουμε, και να χρησιμοποιούμε, μια άπειρη ποικιλία από (τέτοιες) υπολογιστικές συσκευές. Εκ πρώτης όψεως αυτό μοιάζει αναπόφευκτο από το γεγονός και μόνον ότι ένα αυτόματο χρησιμοποιεί αλφάβητα (Σ_K και Σ) τα οποία αν και πεπερασμένα, είναι δυνατόν να λάβουν οσοδήποτε μεγάλο μέγεθος.

Αν αυτό ήταν το πρόβλημα, τότε έχουμε μια λύση: αρκεί ένα πεπερασμένο αλφάβητο για να ***περιγράψουμε*** –προσοχή: όχι *υλοποιήσουμε*– όλα τα αυτόματα (όσες καταστάσεις και εάν έχουν), και όλες τις λέξεις επί των οποίων καλούνται να λειτουργήσουν (όσα σύμβολα και αν έχει το αλφάβητό τους).

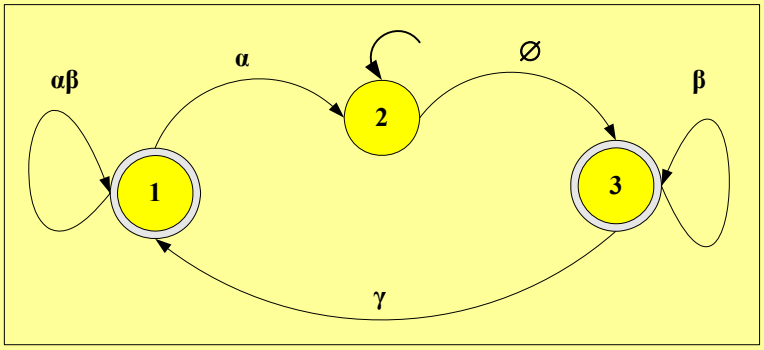
Λ.χ. αρκεί ένα αλφάβητο Σ_u = { [, • , | ,] } με 4 σύμβολα για να *περιγράψουμε* τα σύμβολα ενός οποιουδήποτε αλφαβήτου Σ = { $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_v$ }:

- σ_1 περιγράφεται από τη λέξη του Σ_u^*, $\pi(\sigma_1)$ = [•]
- σ_2 περιγράφεται από τη λέξη του Σ_u^*, $\pi(\sigma_2)$ = [• •]
- ...
- σ_v περιγράφεται από τη λέξη του Σ_u^*, $\pi(\sigma_v)$ = [• • • ... •] (ν τελείες)

Εντελώς παρόμοια μπορούμε να περιγράψουμε τις καταστάσεις του αλφάβητου Σ_K, και με λίγο πιο περίτεχνο τρόπο είμαστε σε θέση να περιγράψουμε τις οδηγίες $\Delta(K, \sigma) = K'$, ενός αυτομάτου. Λ.χ. εάν οι καταστάσεις K, K′ περιγράφονται από τις λέξεις $\pi(K)$ = [••], $\pi(K')$ = [•], και το σύμβολο σ από την λέξη $\pi(\sigma)$ = ••••, τότε η οδηγία $\langle K, \sigma, K' \rangle \in \Delta$, περιγράφεται κατά μονοσήμαντο τρόπο από την λέξη:

$$\pi(\langle K, \sigma, K' \rangle) = [\bullet\bullet[\bullet\bullet\bullet\bullet]\bullet]$$

Αν έχουμε στη διάθεσή μας ένα αυτόματο Α, με οδηγίες Δ, και παραθέσουμε όλες τις περιγραφές των οδηγιών $\{ \pi(i): i \in \Delta \}$, θα λάβουμε μια λέξη $\pi(\Delta) \in$ του Σ_U^*, που περιγράφει επακριβώς τις οδηγίες του αυτομάτου. Με ένα ακόμα ανάλογο βήμα μπορούμε να περιγράψουμε και τα υπόλοιπα στοιχεία του Α: την αρχική κατάσταση Ι και το σύνολο Τ των αποδεκτικών καταστάσεων, επιτυγχάνοντας έτσι μια πλήρη και ακριβή *περιγραφή* του Α. Δίνουμε ένα μικρό παράδειγμα: ένα αυτόματο Α και την περιγραφή του π(Α), καθώς και μια λέξη δ προς αποδοχή ή όχι, και την περιγραφή της π(δ):




```
π(A)= [[••] [•|•••] [[•[•|••]•][•[•]••][••[]•••][•••[••]•••][•••[•••]•]]]
      --I-  --T--  --Δ(·,·,·)-----------------------------------

π(δ)= [•|•|••|•|•••|•••|•|••]
       α α β α  γ  γ  α β
```

Η γλώσσα των περιγραφών όλων των δυνατών αυτομάτων L_A φαίνεται *prima vista* «ακατανόητη», αλλά δεν καθόλου τέτοια· είναι μάλιστα μια *ομαλή* γλώσσα (!) και μπορούμε να δώσουμε μια *ομαλή περιγραφή* της, (βλ. 11η ενότητα). Έχουμε $L_A = L(R_A)$, όπου:

```
Rκ = •+                 καταστάσεις Σκ.
RI = [Rκ]               αρχική κατάσταση I.
RT = {[],[Rκ(|Rκ)*]}    αποδεκτικές καταστάσεις T - 0, 1 ή ≥ 2.
Rσ = •+                 σύμβολα Σ.
Rλ = {[],[Rσ(|Rσ)*]}    λέξη (= σειρά 0, 1 ή ≥ 2 συμβόλων).
Rμ = [Rκ Rλ Rκ]         μεταβάσεις τύπου ⟨K,λ,K'⟩.
RΔ = [Rμ*]              οδηγίες Δ (σύνολο μεταβάσεων).
RA = [RI RT RΔ]         περιγραφή αυτομάτου A.
```

Ακόμα πιο απλούστερη είναι η ομαλή περιγραφή της γλώσσα των περιγραφών L_δ όλων των δυνατών «δεδομένων» λέξεων:

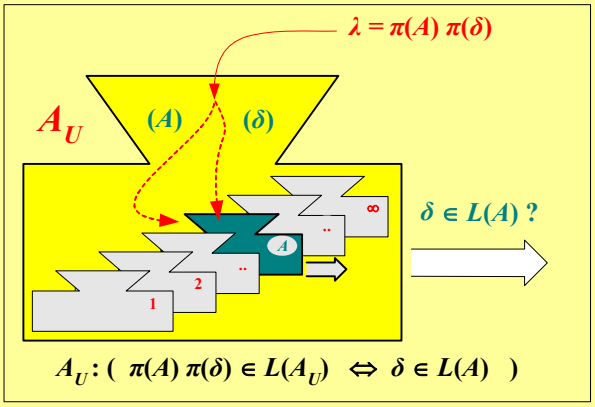
$$R_\delta = \{ [], [R_\sigma(|R_\sigma)^*] \}$$

και $L_\delta = L(R_\delta)$. Προφανώς εξ ίσου ομαλή είναι και η γλώσσα $\mathbf{L}_\pi = L(R_A\, R_\delta)$ που προκύπτει από την παράθεση δύο τέτοιων περιγραφών: την περιγραφή π(Α) ενός όποιου αυτομάτου Α, ακολουθούμενου από την περιγραφή π(δ) μιας όποιας λέξης δ προς αποδοχή ή απόρριψη – (βλ. την «μηχανή» A_U στο σχήμα παρακάτω).

Το ερώτημα που έρχεται έχει κεφαλαιώδη σημασία και δείχνει με τον πιο καθαρό τρόπο πόσο κοντά – στα ζητήματα του υπολογισμού – ευρίσκεται η θεωρία με την πράξη. Το ερώτημα είναι: εφόσον αρκεί ένα και μόνον πεπερασμένο αλφάβητο για να είναι «καθολικό», επαρκές δηλαδή για να *περιγράψουμε* όλα τα δυνατά αυτόματα

και όλες τις δυνατές λέξεις-εισόδους για αυτά, μήπως υπάρχει επίσης ένα «καθολικό» αυτόματο, ικανό να εκτελέσει το έργο οποιουδήποτε άλλου; Υπάρχει, δηλαδή, κάποιο αυτόματο A_U που αποδέχεται την εξής γλώσσα L_U:

$$L_U = L(A_U) = ?? \{ \lambda: \lambda = \pi(A)\pi(\delta) \in L_\pi, \textit{ και το αυτόματο } A \textit{ αποδέχεται τη λέξη } \delta \}$$



Αν υπήρχε ένα τέτοιο «θαυματουργό» αυτόματο τότε το εξής θαυμάσιο θα συνέβαινε: για την υλοποίηση ενός αυτομάτου Α δεν θα χρειαζόταν να κατασκευάζουμε (κυριολεκτικά!) κάθε φορά μια νέα φυσική συσκευή για την υλοποίηση του εκάστοτε Α· θα αρκούσε να κατασκευάζαμε μόνον το καθολικό αυτόματο A_U, και στη συνέχεια απλώς να «γράφαμε» την περιγραφή π(Α) του επιθυμητού αυτομάτου Α. Έτσι, κάθε φορά που θα θέλαμε να διαπιστώσουμε εάν το Α αποδέχεται την λέξη δ ή όχι, θα γράφαμε την περιγραφή της π(δ), θα παραθέταμε τις δύο περιγραφες σε μια λέξη λ = π(Α)π(δ), και θα δίναμε την είσοδο λ στο καθολικό αυτόματο A_U προς εκτέλεση.

Αυτό είπε ο Alan Turing (περί το 1930) ότι *ισχύει για τις «μηχανές Turing»*, διαπιστώνοντας ότι υπάρχει μια καθολική μηχανή T_U, (τύπου Turing, όχι αυτόματο), και οδηγώντας στην τεχνολογική, και όχι μόνον, μεταμόρφωση του 20ου++ αιώνα. Εν τέλει, με την θεωρία του, δημιούργησε τρείς πολύ πρακτικούς «ρόλους»:

- ***κατασκευαστές υλισμικού:*** φτιάχνουν την καθολική μηχανή **T_U**.
- ***σχεδιαστές λογισμικού/προγραμματιστές:*** γράφουν περιγραφές **π(T)** για το T_U.
- ***χρήστες:*** περιγράφουν τα δεδομένα τους **π(δ)**, και χρησιμοποιούν τα π(Τ) και T_U.

Το εισαγωγικό σχόλιο ήταν λίγο μακρύ – αλλά χωρίς αυτό, το θεώρημα της τρέχουσας ενότητας (ένα των 12 γραμμών...) ίσως να φαινόταν ακατανόητο και να περνούσε απαρατήρητο.

Θεώρημα: δεν υπάρχει καθολικό αυτόματο A_U.
Ισχυρισμός: Η γλώσσα $L_U = \{ \lambda: \lambda = \pi(A)\pi(\delta) \in L_\pi, \textit{ και το αυτόματο } A \textit{ αποδέχεται τη } \delta \}$ δεν είναι ομαλή.

Σχέδιο απόδειξης: Έστω ότι υπήρχε ένα αυτόματο A_U (αιτιοκρατικό, χ.α.γ.), αποδεχόμενο την γλώσσα L_U, και έστω $\nu_U < \infty$ το (πεπερασμένο) πλήθος των καταστάσεών του. Η γλώσσα Γ = {α...α: (ν_U+1) φορές} είναι ομαλή και γίνεται αποδεκτή από κάποιο αυτόματο A_Γ, αλλά από το θεώρημα Myhill-Nerode γνωρίζουμε ότι δεν γίνεται αποδεκτή από κανένα αυτόματο με ≤ ν_U καταστάσεις, διότι η γλώσσα Γ έχει (ν_U+1) κλάσεις στη σχέση ισοδυναμίας $\approx_\Gamma$, (βλ. 9η ενότητα). Η περιγραφή π(A_Γ) οδηγεί πάντοτε το A_U σε *μία* κατάσταση K_Γ = K(π(A_Γ)), και από εκεί η υπόλοιπη περιγραφή π(δ) το οδηγεί σε κατάσταση αποδεκτική (αν δ∈Γ) ή απορριπτική, (αν δ∉Γ). Αν πάρουμε το παραλλαγμένο αυτόματο $A_U[I=K_\Gamma]$ στο οποίο η αρχική κατάσταση είναι η K_Γ, τότε θα έχουμε αυτόματο με ν_U καταστάσεις που αποδέχεται την γλώσσα π(Γ) = [π(α)|π(α)| ... |π(α)], (ν_U +1) φορές, γλώσσα που παρόμοια και εύκολα προκύπτει ότι επίσης απαιτεί αυτόματο με τουλάχιστον (ν_U+1) καταστάσεις – πράγμα άτοπο. ■